CAPÍTULO 4

MODELOS DETERMINÍSTICOS CON DEMANDA CONSTANTE

La formulación de un problema,
es más importante que su solución.
Albert Einstein

Los modelos determinísticos son una representación bastante simplificada de aquello que pasa en el mundo real. Las características que describen estos modelos hacen que la formulación sea bastante simple y permiten tener un modelo que sea fácil de resolver. Es por esta razón que estos modelos se consideren como el fundamento en el que están basados todos los modelos de inventarios.

Una crítica constante sobre este tipo de modelos es la suposición de que conocemos con absoluta certeza la demanda del cual seremos objeto. Como habíamos comentado en el capítulo anterior, un modelo determinístico no contempla la existencia de la aleatoriedad, y dado que en el mundo real la incertidumbre aparece frecuentemente en cualquier tipo de fenómeno, una gran mayoría de las personas argumenta que no es posible llevar a la práctica los resultados que arrojan estos modelos.

Si bien es cierto que cada empresa posee características propias que imposibilitan la creación de un modelo que refleje en su totalidad cada aspecto particular que se vive en las diferentes organizaciones, los modelos de inventarios son una excelente una guía para la toma de decisiones, estos modelos nos ofrecen parámetros muy certeros que nos permiten responder a las preguntas fundamentales de una política de inventario, “¿cuándo pedir?”, “¿cuánto pedir?”. Si bien las respuestas que se obtienen en los modelos no representan una verdad absoluta, los resultados si reflejan una excelente sugerencia para responder a las preguntas antes señaladas.

En la práctica, existen otros modelos de inventarios que poseen una mayor complejidad, pero las soluciones que nos modelos determinísticos son un valioso consejo sobre cuál debería ser una política adecuada para nuestra empresa. Esta argumentación se ampliará en los siguientes capítulos.

Durante este capítulo, se estudiarán únicamente los modelos determinísticos con demanda constante. En la primera sección se describen los resultados de los modelos clásicos de esta teoría. En la segunda sección describe la forma de tratar estos modelos cuando existen descuentos por volumen. En la tercera sección se tratan estos mismos modelos pero implicando un mayor número de productos (también conocidos como problemas multi-items o multiproducto). La cuarta sección está dedica a la formulación de modelos conjuntos, es decir, aquellos modelos que contemplan la posibilidad de que un conjunto de artículos sean suministrados por un mismo proveedor. Finalmente, la última sección se dedica a la creación y formulación de modelos.

4.1 Modelos determinísticos con demanda constante

Los primeros modelos de inventario fueron desarrollados por Ford Whitman Harris en 1913, estos modelos clásicos fueron denominados como el modelo de la cantidad óptima de pedido y el tamaño óptimo del lote de producción (EOQ y EPQ, por sus siglas en inglés). Tiempo después la publicación de Harris fue analizada y publicada nuevamente por el consultor R. H. Wilson quien en 1934 popularizó el modelo.

Para la creación de este tipo de modelos fue necesario realizar las siguientes suposiciones:

1. La demanda se conoce con exactitud y es constante durante todo el tiempo.
2. Las condiciones de demanda y los diferentes costos involucrados en el modelo se mantienen constantes durante un horizonte de tiempo infinito.
3. La demanda debe ser satisfecha.
4. Los faltantes pueden ser planificados y los clientes están dispuestos a tolerar la demora en la entrega de los productos.

Además de estos supuestos, se establecerá la siguiente notación:

K = Costo total anual
D = Demanda anual
P = Capacidad anual de producción
A = Costo de pedido (costo de preparación)
h = Costo anual de mantenimiento por unidad
C = Costo de adquisición por unidad (costo unitario de producción)
Q = Cantidad de pedido (tamaño de la corrida de producción)
N = Número de pedidos al año
π_t = Costo anual por unidad agotada
π = Costo por unidad agotada (independiente del tiempo)
I_{MAX} = Nivel máximo del inventario
b = Nivel máximo de agotamiento
t = Ciclo del inventario
τ = Tiempo de adelanto, tiempo de entrega o tiempo de abastecimiento.

Por otra parte, una característica importante es que el modelo contempla una sola cantidad de pedido constante en el tiempo. Esta característica no es un supuesto, sino que es una conclusión hacia el razonamiento de que si se logra establecer una cantidad óptima de pedido para una fracción del tiempo, entonces, dado que las condiciones del modelo en cualquier parte del tiempo siempre serán las mismas, esta cantidad de pedido logrará ser la óptima en cualquier fracción del tiempo.

Bajo estos supuestos, entonces es posible formular los siguientes modelos de inventarios.

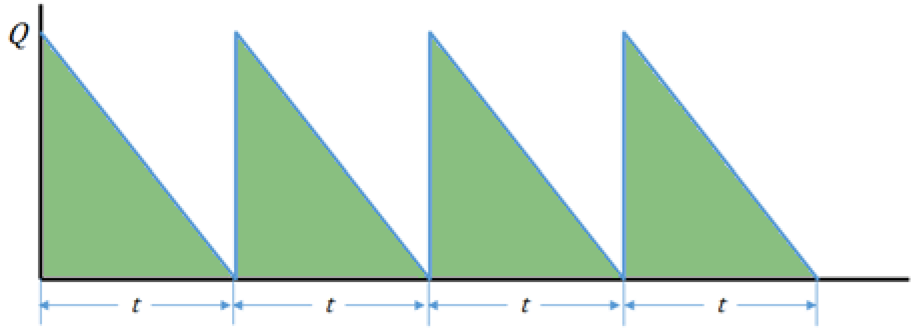
4.1.1 El modelo básico comercial

Este modelo supone que el abastecimiento de artículos depende de un proveedor externo y que no se permiten agotamientos.

Bajo estas suposiciones, el comportamiento del inventario es como se muestra en la siguiente figura:

FIGURA 4.1

COMPORTAMIENTO DEL INVENTARIO EN EL MODELO BÁSICO COMERCIAL



Dado que el modelo no permite agotamiento, entonces los costos relevantes de inventarios estarán representados por la suma del costo anual de pedidos y el costo anual de conservación.

El costo anual de pedido es equivalente al costo de realizar cada pedido (A) multiplicado por el número de pedidos que se realizan en el año (N). Dado que cada vez que se realiza un pedido se solicitan Q unidades y que la demanda debe ser satisfecha, entonces el número de pedidos anuales es $N = D/Q$. Por lo que el costo anual de pedidos puede ser representado por la expresión: $A\,(D/Q)$.

Por otra parte, el caso del costo anual de conservación está representado por el costo anual de mantenimiento por unidad (h) multiplicada por el tamaño del inventario promedio. Dado que en todos los periodos de tiempo el inventario se comporta de igual forma, entonces el inventario promedio de un periodo es equivalente al inventario promedio en todo el año. De esta forma, nuestro problema se reduce a encontrar el tamaño del inventario promedio de un periodo.

Pero estimar el inventario promedio resulta bastante simple, pues en cada ciclo de inventario se inician con Q unidades, y al término del ciclo la cantidad en inventario se agota. De esta forma, el inventario promedio de cada ciclo será de $Q/2$ unidades, y por tanto, esta cantidad también refleja su inventario promedio anual. Por lo que el costo anual de conservación será: $h\,Q/2$

De esta manera, el costo total anual es:

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{Q}{2}$$

Con el objeto de encontrar el mínimo de esta función entonces se obtiene su derivada

$$K'(Q) = -A \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

Igualando esta expresión a cero y despejando a Q obtenemos la fórmula de la cantidad de pedido que minimiza el costo total:

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

Esta fórmula es conocida como la fórmula de la cantidad económica de pedido o también como la fórmula EOQ por sus siglas en inglés.

Ejemplo 4.1

Gaermont Toilette Paper es una empresa que se dedica a la comercialización del papel higiénico. Gaermont ha calculado su demanda en 20 000 paquetes mensuales (considere que cada mes tiene 25 días hábiles). El costo de realizar un pedido es de $2000, el precio unitario que le ofrecen es de $60 por cada paquete y el costo de mantener una unidad en inventario lo calcula en un 20% del valor del artículo. Determine:

a) la cantidad económica de pedido que Gaermont deberá utilizar con el objeto de minimizar los costos totales.
b) el número óptimo de pedidos anuales.
c) el ciclo del inventario (en días).
d) el costo total óptimo.
e) el punto de reorden si su proveedor le ha prometido la entrega en 7 días hábiles.
f) el punto de reorden si su proveedor le ha prometido la entrega en 15 días hábiles.

Solución.-

Datos:

$A = 2000$

$C = 60$

$h = i\,C = 0.20\,(60) = 12$

$D = 20\,000\,(12) = 240\,000$

a)

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(2000)(240000)}{12}} \approx 8944$$

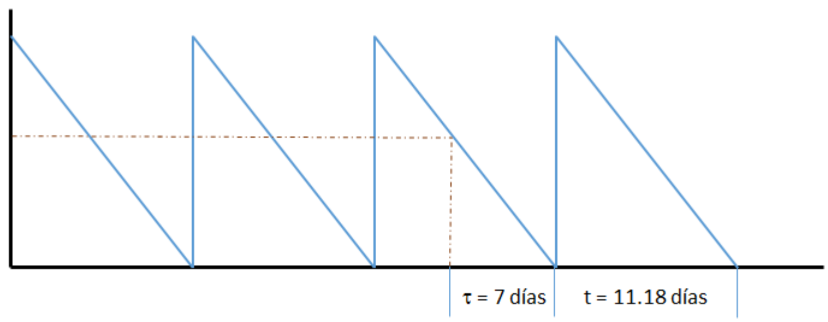
b) El número óptimo de pedidos anuales es $N = D/Q^*$ = 26.83 pedidos anuales

c) El número de días que transcurren entre pedidos es t = 300/26.83 = 11.18 días

d) El costo total óptimo es de

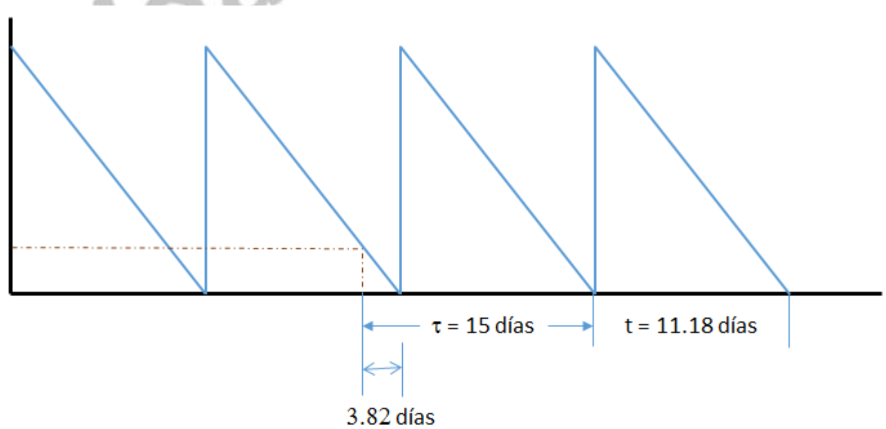
$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{Q}{2} = 2000\,\frac{240000}{8944} + 12\,\frac{8944}{2} \approx 107\,331$$

e) Note que el tiempo de entrega es 7 días y esto es menor que ciclo del inventario que es de 11.18 días. Una representación gráfica sobre este punto es el siguiente:



Además, sabemos que el consumo diario es de 800 unidades, entonces r puede calcularse como $r = 7\,(800) = 5600$

f) En este caso, el tiempo de entrega es mayor que el ciclo del inventario por 3.82 días, gráficamente esto puede representarse como



Por lo tanto, el punto de reorden es equivalente a 3.82 días. Dado que el consumo diario es de 800 unidades, entonces $r = 3.82\,(800) = 3056$.

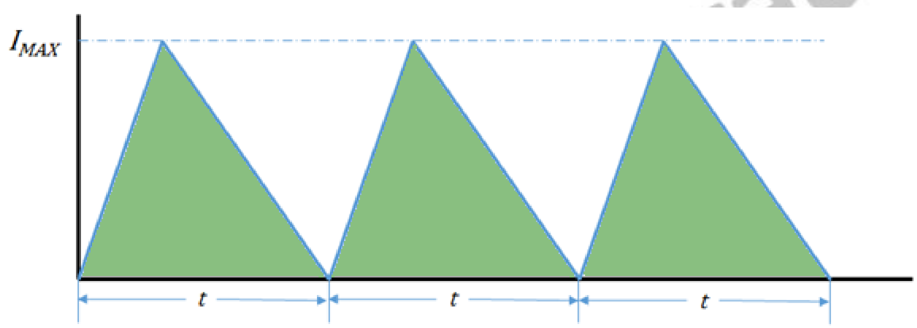
4.1.2 El modelo básico productivo

En este caso, el abastecimiento de los artículos proviene de la misma empresa mediante una etapa de producción sin permitir faltantes. De manera similar al modelo comercial (en donde el objetivo es encontrar la cantidad económica de pedido), el modelo productivo pretende encontrar el tamaño de lote que minimiza el costo total.

Bajo estas nuevas suposiciones, el comportamiento del inventario es como se muestra a continuación:

FIGURA 4.2

COMPORTAMIENTO DEL INVENTARIO EN EL MODELO BÁSICO PRODUCTIVO



El inventario máximo en este modelo no llega a ser Q, ya que durante el tiempo que se realiza la producción también existe un consumo.

En general, si consideramos una demanda anual de D unidades, una capacidad de producción anual de P unidades y un tamaño de lote de producción de Q unidades, entonces el tiempo que se utiliza para producir éstas Q unidades es Q/P. Dado que la tasa demanda anual es D unidades entonces el consumo durante este tiempo es $D(Q/P)$. De esta forma, podemos decir que el tamaño del inventario máximo es la diferencia entre las Q unidades que se fabrican y las $D(Q/P)$ unidades que se consumen. Esto es:

$$I_{MAX} = Q - D(Q/P) = Q[1 - D/P]$$

De forma muy similar al modelo anterior (dado que en este modelo tampoco se permiten faltantes), el costo total anual estará representado por la suma del costo anual de preparación y el costo anual de conservación.

El costo anual de preparación se puede obtener multiplicando el costo de preparación (A) por el número de corridas de producción que se realizan en el año. Dado que el tamaño de las corridas de producción es de Q unidades, entonces el número de corridas anuales es $N = D/Q$. Por lo que el costo anual de preparación es: $A\,(D/Q)$.

En el caso del costo anual de conservación, este costo nuevamente se calcula multiplicando el costo anual de mantenimiento por unidad (h) por el tamaño del inventario promedio. Nuevamente podemos afirmar que debido a que en todos los periodos el inventario se comporta de forma similar, entonces el inventario promedio de un periodo es equivalente al inventario promedio en todo el año.

En este caso, resulta fácil observar (y demostrar) que: $I_{\mathrm{PROM}} = I_{\mathrm{MAX}}/2$, y por lo tanto, $I_{\mathrm{PROM}} = Q\,[1\text{-}D/P]/2$.

Por lo que el costo anual de conservación es: $h\,Q\,[1 - D/P]\,/2$.

Así, el costo total anual es:

$$K(Q) = A\frac{D}{Q} + h\frac{Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)}{2}$$

Con el objeto de encontrar el mínimo de esta función entonces se obtiene su derivada

$$K(Q) = -A\frac{D}{Q^2} + h\,\frac{\left(1 - \frac{D}{P}\right)}{2}$$

Igualando esta expresión a cero y despejando a Q obtenemos la fórmula de la cantidad de pedido que minimiza el costo total:

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$

Esta expresión es conocida como la fórmula del tamaño económico del lote o también como la fórmula EPQ por sus siglas en inglés.

Ejemplo 4.2

Gaermont Pizzas se dedica a la producción de bases para pizza. Gaermont tiene una capacidad de producción de 500 unidades diarias y opera 300 días por año. Gaermont tiene un costo de preparación de $500 por corrida de producción y el costo de mantenimiento lo ha calculado como el 20% del valor del producto (el cual es de $25 por base). La demanda anual es de 60 000 bases por año. Determine:

a) la cantidad económica de producción que Gaermont deberá utilizar con el objeto de minimizar los costos totales.
b) el número óptimo de pedidos anuales.
c) el ciclo del inventario (en días).
d) el costo total óptimo.
e) el punto de reorden si el tiempo de adelanto es de 7 días hábiles.
f) el punto de reorden si el tiempo de adelanto es de 15 días hábiles.

Solución.-

Datos:

A = 500
C = 25
$h = i\,C$ = 0.20 (25) = 5
D = 60 000
P = (500) (300) = 150 000

a)

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h\left[1-\frac{D}{P}\right]}} = \sqrt{\frac{2(500)(60000)}{5(1-0.4)}} \approx 4472$$

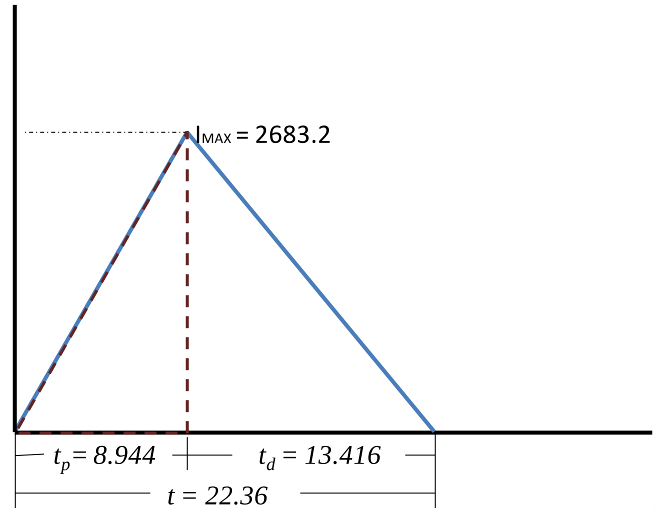
b) El número óptimo de pedidos anuales es $N = D/Q^* = 13.42$ pedidos anuales

c) El número de días que transcurren entre pedidos es $t = 300/13.42 = 22.36$ días

d) El costo total óptimo es de

$$K(Q) = 500\frac{60000}{4472} + 5\frac{4472(1-0.4)}{2} \approx 13\,416$$

e) En este caso, la gráfica del inventario es como se muestra a continuación:



Dado que τ = 7 días, entonces $\tau < t_d$ (es decir, τ < 13.416). En este caso, podemos calcular r como el consumo equivalente a 7 días, y puesto que se consumen 200 unidades diarias, entonces $r = 7\ (200) = 1\ 400$ unidades.

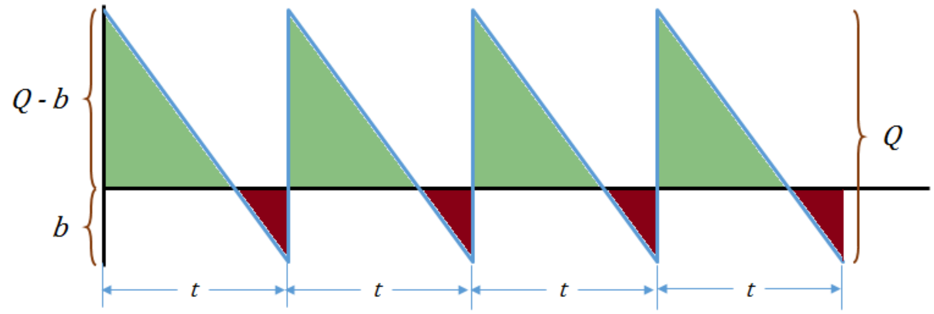
f) Observando la gráfica anterior nos damos cuenta de que en el caso de que el tiempo de preparación sea de 15 días, entonces que debe empezarse a preparar 1.584 días antes de terminar la producción. Dado que el tiempo de producción es de 8.944 días, entonces se deberá iniciar la preparación 7.36 días después de que se inicia la producción.
Dado que se producen 500 unidades diarias y que se consumen 200 unidades diarias, entonces el inventario crece 300 unidades al día, por lo que el tiempo punto de reorden debe calcularse como $r = 7.36\ (300) = 2\ 208$ unidades durante el tiempo de producción.

4.1.3 El modelo comercial con agotamientos

Este modelo supone que el abastecimiento de artículos depende de un proveedor externo y que los agotamientos son planificados. Los pedidos son realizados de tal forma que la llegada de un pedido se realiza cuando existen exactamente b unidades agotadas. Los pedidos son de tamaño Q, por lo que el nivel máximo del inventario es $Q - b$ unidades. Bajo estas suposiciones, el comportamiento del inventario es como se muestra en la siguiente figura:

Figura 4.3

Representación Gráfica del Inventario y el Agotamiento en el Modelo Comercial con Agotamientos



En este caso, el Costo Total anual estará representado por la suma del costo anual de pedidos, el costo anual de conservación y el costo total anual de agotamientos.

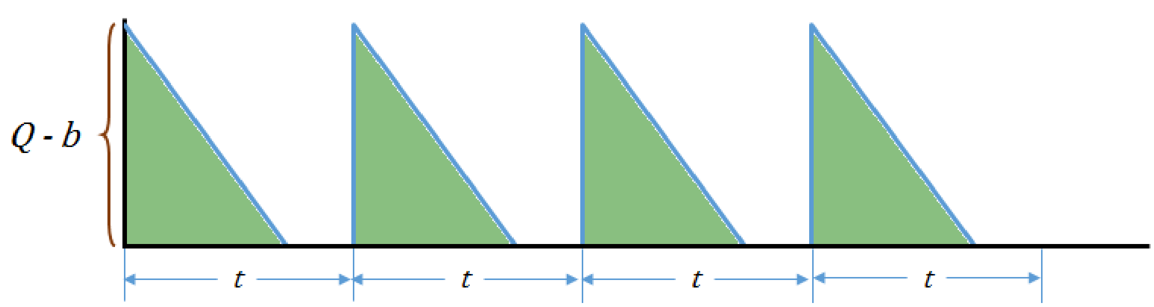
Nuevamente, el costo anual de pedido es equivalente al costo de pedido (A) multiplicado por el número de pedidos que se realizan en el año. Dado que cada vez que se realiza un pedido se solicitan Q unidades, entonces el número de pedidos anuales es $N = D/Q$. Por lo que el costo anual de pedidos puede ser representado por la expresión: $A\,(D/Q)$.

El costo anual de conservación, está representado por el costo anual de mantenimiento por unidad (h) multiplicada por el tamaño del inventario promedio. Tal como en los dos modelos anteriores, el nivel promedio de inventario anual es equivalente al nivel de inventario promedio en uno de los periodos, pero en este caso, la obtención del inventario promedio es un poco más complicada.

La representación gráfica de los inventarios en este modelo es como se muestra a continuación:

Figura 4.4

Representación Gráfica del Inventario Real en el Modelo Comercial con Agotamientos



Como se puede observar en la figura, existen lapsos de tiempo en que no existe el inventario. Denominemos t_1 a la fracción del tiempo en que existe inventario y t_2 a la fracción del tiempo en que no existe inventario. Dado que la durante la fracción del tiempo t_1 el inventario promedio será $(Q - b)/2$, mientras que en la fracción del tiempo t_2 el inventario promedio será de cero unidades, entonces, el inventario promedio durante la fracción de tiempo t será: $(t_1/t)\ (Q - b)/2 + (t_2/t)\ (0) = (t_1/t)\ (Q - b)/2$.

Ahora bien, de la figura 4.3 podemos observar que se consumen $(Q - b)$ unidades en el tiempo t_1; y por otra parte, se consumen Q unidades en un tiempo t. De tal manera que podemos llegar a la relación: $(Q - b)/t_1 = Q/t$, de donde obtenemos que $t_1/t = (Q - b)/Q$.

Sustituyendo ésta igualdad en la ecuación anterior se obtiene que:
$I_{\mathrm{PROM}} = [(Q - b)/2]\ [t_1/t] = [(Q - b)/2]\ [(Q - b)/Q] = (Q - b)^2/2Q$

De esta forma, podemos concluir que el costo anual de mantenimiento de este modelo es $h\,(Q - b)^2/2Q$.

Finalmente, el costo anual de agotamientos puede considerar dos diferentes vertientes. En primer lugar, podría existir un costo fijo de penalización por cada unidad agotada independientemente del tiempo (al que denominamos π); por otra parte, también está la posibilidad de que exista un costo de agotamiento que es por unidad por año (al que denominamos π_τ).

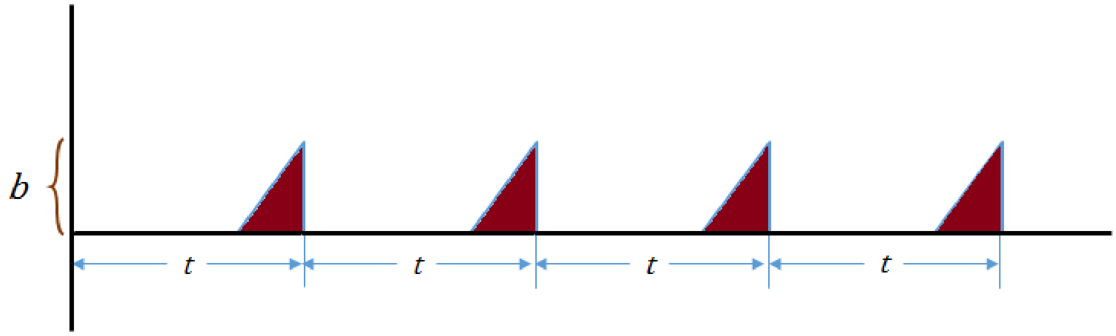
Con respecto al primero de los costos, debe considerarse que en cada ciclo del inventario se presentarán b unidades agotadas, por lo que el castigo en un periodo será de πb. Dado que existen $N = D/Q$ periodos en un año, entonces el costo de este primer castigo será $\pi bD/Q$.

Con respecto a la segunda parte del costo anual de agotamiento, en este caso es necesario considerar que el castigo se aplica al promedio de unidades agotadas durante el año. Para obtener este costo es necesario obtener el promedio de unidades agotadas por año, lo cual representa un procedimiento muy similar a la obtención del inventario promedio.

Ahora, considere la gráfica del agotamiento en cada periodo.

FIGURA 4.5

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL AGOTAMIENTO EN EL MODELO COMERCIAL CON AGOTAMIENTOS



Al igual que en el caso del inventario, el objetivo es encontrar el agotamiento promedio. Como se puede observar en la figura, existen lapsos de tiempo en que no existe agotamiento. Sea t_1 a la fracción del tiempo en que no existe agotamiento y t_2 a la fracción del tiempo en que existe agotamiento. Dado que la durante la fracción del tiempo t_1 el agotamiento promedio será 0, mientras que en la fracción del tiempo t_2 el agotamiento promedio será de $b/2$ unidades, entonces, el inventario promedio durante la fracción de tiempo t será: $(t_1/t)\ (0) + (t_2/t)\ (b/2) = (t_2/t)\ (b)/2$.

Ahora se puede observar que se consumen b unidades en un tiempo t_2; y por otra parte, se consumen Q unidades en un tiempo t. De esta forma llegamos a la relación: $b/t_2 = Q/t$, de donde obtenemos que $t_2/t = b/Q$.

Sustituyendo ésta igualdad en la ecuación anterior se obtiene que:
$b_{\text{PROM}} = [b/2]\ [t_2/t] = [b/2]\ [b/Q] = b^2/2Q$

Así, esta parte del costo anual de agotamiento es $\pi_t\ b^2/2Q$.

Por lo tanto, el costo anual de agotamiento es $\pi bD/Q + \pi_t\ b^2/2Q$.

De esta forma, el costo total del modelo comercial con agotamientos está representado por la expresión:

$$K(Q,b) = A\frac{D}{Q} + h\,\frac{(Q-b)^2}{2Q} + \pi b\frac{D}{Q} + \pi_t\frac{b^2}{2Q}$$

Ahora tenemos una función de dos variables, para encontrar los puntos críticos es necesario obtener las derivadas parciales de K con respecto a Q y b. Igualarlas a cero y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -A\ \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{b^2}{Q^2}\right) - \pi b\ \frac{D}{Q^2} - \frac{\pi_t}{2}\frac{b^2}{Q^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -\ \frac{h}{Q}(Q - b) + \pi\ \frac{D}{Q} + \pi_t\frac{b}{Q}$$

Igualando estas expresiones a cero obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{AD}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{hb^2}{2Q^2} - \ \frac{\pi bD}{Q^2} - \frac{\pi_t b^2}{2Q^2} = 0 \qquad (1)$$

$$-h + \ \frac{hb}{Q} + \ \frac{\pi D}{Q} + \frac{\pi_t b}{Q} = 0 \qquad (2)$$

Multiplicando la ecuación (2) por Q y despejando b obtenemos:

$$b = \ \frac{(hQ - \pi D)}{h + \pi_t} \qquad (3)$$

Sustituyendo ahora el valor de b en la ecuación (1)

$$-\frac{AD}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{h\ \frac{(hQ - \pi D)^2}{(h + \pi_t)^2}}{2Q^2} - \ \frac{\pi D}{Q^2}\frac{(hQ - \pi D)}{h + \pi_t} - \frac{\pi_t\ \frac{(hQ - \pi D)^2}{(h + \pi_t)^2}}{2Q^2} = 0$$

Multiplicando esta ecuación por $2Q^2$ se obtiene

$$-2AD + hQ^2 - h\ \frac{(hQ - \pi D)^2}{(h + \pi_t)^2} - \ 2\pi D\,\frac{(hQ - \pi D)}{h + \pi_t} - \pi_t\,\frac{(hQ - \pi D)^2}{(h + \pi_t)^2}\ = 0$$

Agrupando el factor común del tercer y quinto término obtenemos

$$-2AD + hQ^2 - (h + \pi_t)\ \frac{(hQ - \pi D)^2}{(h + \pi_t)^2} - \ 2\pi D\,\frac{(hQ - \pi D)}{h + \pi_\tau} = 0$$

Reduciendo el tercer término y multiplicando toda la ecuación por $h + \pi_t$

$$(h + \pi_t)(-2AD + hQ^2) - (hQ - \pi D)^2 - \ 2\pi D(hQ - \pi D) = 0$$

Desarrollando se obtiene:

$$-2AD(h + \pi_t) + h^2Q^2 + h\pi_t Q^2 - h^2Q^2 + 2hQ\pi D - \pi^2D^2 - \ 2\pi DhQ + 2\pi^2D^2 = 0$$

Reduciendo términos

$$-2AD(h + \pi_t) + h\pi_t Q^2 + \pi^2D^2 = 0$$

Finalmente, despejando Q se obtiene

$$Q = \sqrt{\frac{2AD(h + \pi_t) - \pi^2 D^2}{h\pi_t}} \qquad (4)$$

Ejemplo 4.3

Gaermont Office vende sillas secretariales. La demanda anual está calculada en 900 sillas (considere 250 días al año). Gaermont ordena sus sillas de un fabricante y el costo de colocar una orden es de $7000. Gaermont estima que el costo de mantener una unidad agotada es de $300 por año (considerando, incluso, el costo de buena voluntad). Gaermont paga $600 por cada silla y el costo anual de mantenimiento de inventario lo ha calculado en el 30% del valor de la compra. Determine:

a) la cantidad económica de pedido y el número óptimo de unidades agotadas que Gaermont deberá utilizar con el objeto de minimizar los costos totales.

b) el número óptimo de pedidos anuales.

c) el ciclo del inventario (en días).

d) el costo total óptimo.

e) el punto de reorden si el tiempo de adelanto es de 20 días hábiles.

f) el punto de reorden si el tiempo de adelanto es de 45 días hábiles.

Solución.-

Datos

A = 7000	C = 600
$h = iC$ = 0.30 (600) = 180	D = 900
π = 0	π_t = 300

a) Sustituyendo los datos en las fórmulas obtenidas llegamos a que:

$$Q = \sqrt{\frac{2(7000)900(180 + 300) - 0}{180(300)}} \approx 335$$

$$b = \frac{[180(335) - 0]}{480} \approx 126$$

b) El número óptimo de pedidos anuales es $N = D/Q^*$ = 2.6866 pedidos anuales

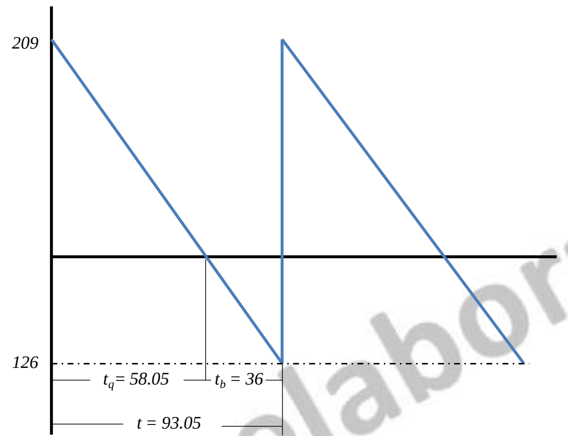
c) El número de días que transcurren entre pedidos es t = 250/2.6866 ≈ 93.05 días

d) El costo total óptimo es de

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{(Q-b)^2}{2Q} + \pi b\frac{D}{Q} + \frac{\pi_t b^2}{2Q^2}$$

$$= 7000\frac{900}{335} + 180\,\frac{(335-126)^2}{2(335)} + 0 + \frac{300(126)^2}{2(335)} \approx 37\,650$$

e) En este caso, la gráfica del inventario es como se muestra a continuación:



Note que el consumo diario es de 3.6 unidades. Por lo que en 20 días se consumirán 72 unidades, y dado que se debe ordenar cuando se deban 126 unidades, entonces $r = 72 - 126 = -54$ unidades, es decir, se debe realizar el pedido cuando se deban 54 unidades.

f) Dado que nuevamente $\tau < t$, entonces $r = [\tau Q / t] - b$ por lo que $r = [45(335)/ 93.05] - 126 = 36$ unidades.

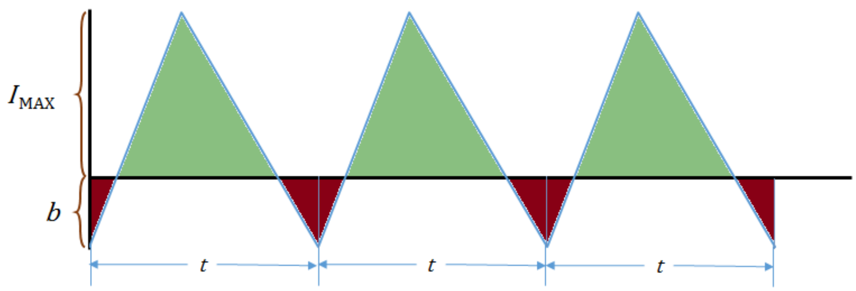
Una nota importante sobre este modelo es considerar la posibilidad de que el radicando fuese un número negativo. De ser así, entonces el cálculo de Q en la ecuación (3) resultaría un número imaginario; en este caso, debería suceder que la solución debería ser $b = 0$ y el cálculo de Q se realizaría utilizando la fórmula del modelo básico. De igual manera, podría suceder que Q tuviese un valor real, pero al sustituir su valor para obtener b en la ecuación (2), entonces el valor de b fuese menor de cero. Dado que un agotamiento negativo no sería posible interpretarlo, entonces la solución consiste en hacer $b = 0$ y remitirnos a la fórmula para obtener Q en el modelo básico.

4.1.4 El modelo de producción con agotamientos

El modelo supone que el abastecimiento de artículos depende de la producción de la empresa y que los agotamientos son planificados. Las corridas de producción son realizadas de tal manera que se inicia la producción justamente cuando existen b unidades agotadas. Las corridas son de tamaño Q, por lo que el nivel máximo del inventario es $[Q(1 - D/P) - b]$ unidades. Bajo estas suposiciones, el comportamiento del inventario es como se muestra en la siguiente figura:

FIGURA 4.6

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL INVENTARIO EN EL MODELO PRODUCTIVO CON AGOTAMIENTO



La ecuación que representa el costo total es:

$$K(Q,b) = A\frac{D}{Q} + h\frac{\left[Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-b\right]^2}{2Q\left(1-\frac{D}{P}\right)} + \pi b\frac{D}{Q} + \pi_t\frac{b^2}{2Q\left(1-\frac{D}{P}\right)}$$

Al igual que en el caso anterior, es necesario derivar la función con respecto a Q y respecto a b. Igualar ambas derivadas a cero y obtener los puntos que minimizan el valor de la función.

En este caso llegaremos a que:

$$b = \frac{(hQ - \pi D)\left(1-\frac{D}{P}\right)}{h+\pi_t}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2AD(h+\pi_t) - \pi^2 D^2\left(1-\frac{D}{P}\right)}{h\pi_t\left(1-\frac{D}{P}\right)}}$$

Se deja al lector como ejercicio la obtención de la fórmula del costo total y encontrar Q^* y b^*.

4.2 Modelos determinísticos con descuentos

Cuando consideramos los costos de adquisición como una parte del modelo de inventarios y los incorporamos a la función de costo total, entonces podemos pensar en tres diferentes costos: el costo de pedir, el costo de mantener y el costo de adquirir.

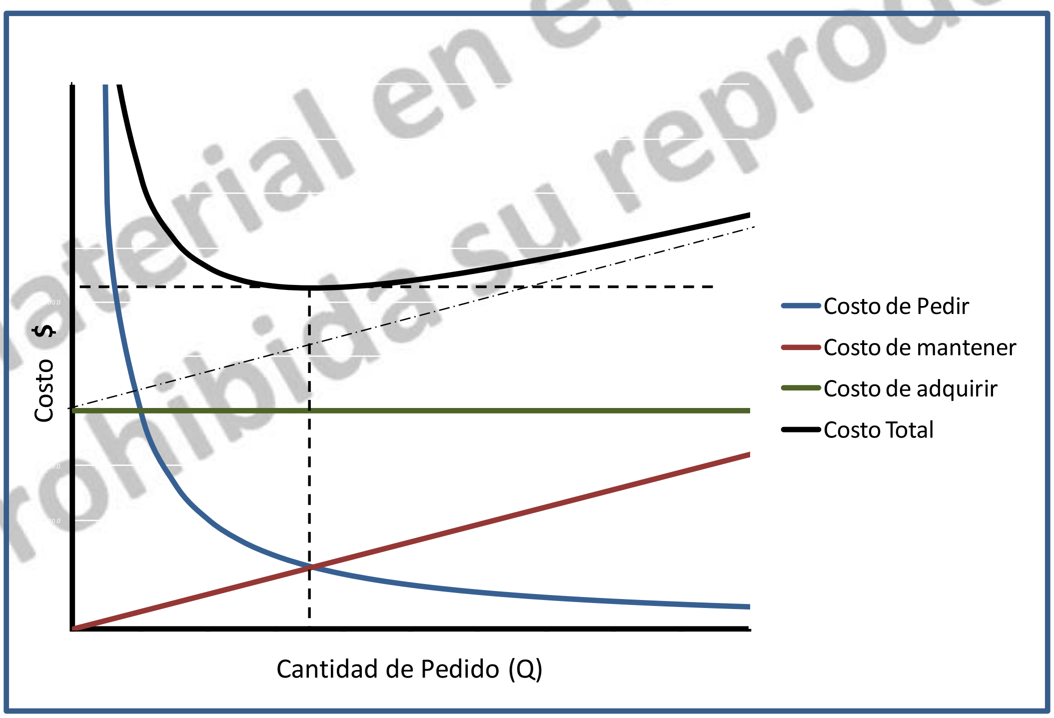
Las expresiones que representan a cada tipo de costos son las siguientes:

Costo de pedir = AD/Q
Costo de mantener = $hQ/2$
Costo de adquirir = CD

Si graficamos por separado cada uno de estos costos entonces podríamos observar lo siguiente:

FIGURA 4.7

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DIFERENTES COSTOS DE INVENTARIOS



Hay varias cosas que pueden observarse en el modelo:

1) Mientras más grande sea la cantidad de pedido menor es el Costo anual de pedir. Esto resulta bastante lógico, ya que mientras mayor sea la cantidad que nosotros

solicitamos, menor será el número de pedidos que realizamos, y por tanto, este costo tiende a disminuir.

2) Mientras más grande es la cantidad de pedido, mayor es el costo anual de mantener. Lo cual también es muy comprensible dado que mientras mayor es la cantidad de pedido mayor será la cantidad de unidades que se tendrán en inventario.

3) Algo sumamente importante que puede notarse en la gráfica es que la cantidad óptima de pedido (el punto en el cual el costo total alcanza su valor mínimo) justamente coincide con la intersección de las curvas que representan el costo anual de pedido y el costo anual de mantenimiento. Es decir, el óptimo de la función se alcanza cuando:

$$A\frac{D}{Q} = h\frac{Q}{2}$$

Esto es importante, ya que si al evaluar una función de costo total se obtiene que el costo anual de pedir es más alto que el costo anual de mantener, esto significaría que sería deseable aumentar la cantidad de pedido (y de esa forma disminuir el número de pedidos y en consecuencia el costo anual de pedir). Regularmente en la práctica este es un buen indicador para determinar si la cantidad de pedido debe aumentar o disminuir.

4) Después de sobrepasar el valor de la cantidad óptima de pedido, la función de costo total se vuelve asintótica a una recta con ordenada al origen CD y que es paralela a la recta que representa el costo anual de mantenimiento.

5) Es posible observar también que el costo de adquisición se mantiene constante sin importar cuál sea la cantidad de pedido (razón por la que muchos textos deciden no incluir este costo como parte del costo total).

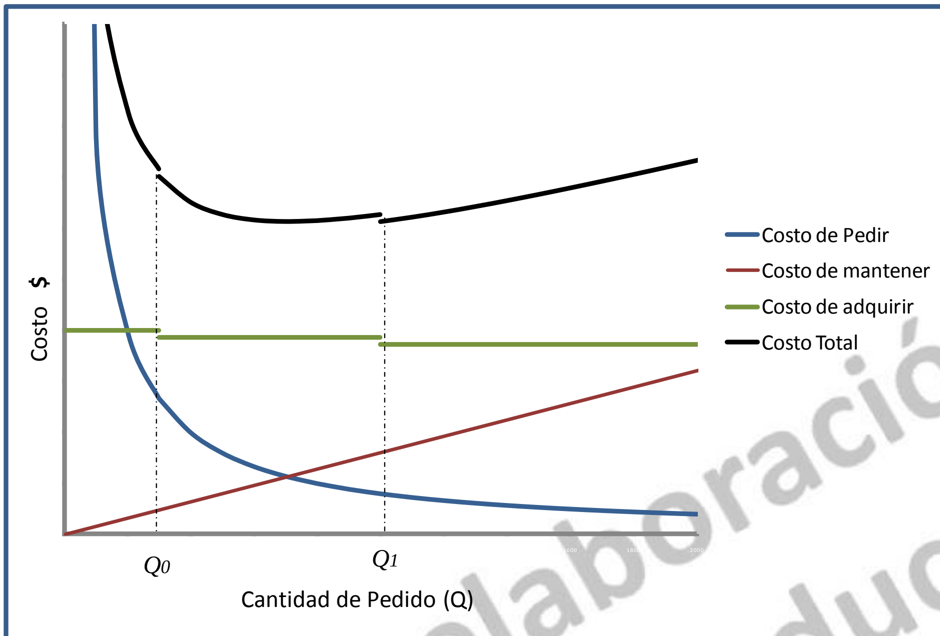
Cuando hablamos de inventarios con descuentos, entonces regularmente se establece que una empresa puede alcanzar algún descuento si llega a establecer una cantidad de pedido determinada (por ejemplo, se establece un 3% de descuento si una empresa solicita 500 unidades o más).

En este caso, la función de costo anual de adquisición puede tomar la forma de una función constate en determinados intervalos. Por ejemplo, suponga que usted tiene un establecimiento comercial, y que uno de sus proveedores le ofrece un precio C_0 por unidad, sin embargo, el proveedor le ofrece un precio C_1 (menor a C_0) si usted hace un pedido de al menos Q_1 unidades, y un precio C_2 si usted realiza un pedido de cuando menos Q_2 unidades.

En este caso, la gráfica que representa los costos tomaría la siguiente forma:

FIGURA 4.8

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS COSTOS DE INVENTARIOS CUANDO SE OFRECEN DESCUENTOS POR VOLUMEN



Como es posible observar gráficamente, la función de costo de adquirir presenta discontinuidades cuando se alcanza algunos de los descuentos. De la misma manera, la función de costo total presenta "saltos" en los mismos puntos.

Ante un comportamiento como éste, es posible que la función de costo total alcance su mínimo justo en el valor Q^* (que es obtenido mediante la fórmula) o bien, en alguno de los puntos en donde se presenten los descuentos y que se encuentren después de ese valor Q^*.

Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.4

Gaermont Oils se dedica a la comercialización de aceites y aditivos para automóviles. Su principal producto tiene una demanda anual de 20,000 litros al año (considere 250 días al año). El costo de colocar una orden la ha calculado en $4000. Además, estima que el costo de mantener una unidad agotada en inventario durante un año es de $6. Su proveedor le ha presentado diversos descuentos dependiendo del número de unidades que Gaermont adquiera al momento de realizar la compra. Los datos relevantes se presentan en la siguiente tabla:

Q	C
$Q < 2{,}500$	\$30.00
$2{,}500 \leq Q < 5{,}000$	\$29.00
$5{,}000 \leq Q < 10{,}000$	\$28.00
$10{,}000 \leq Q < 20{,}000$	\$27.00
$20{,}000 \leq Q$	\$26.00

a) Determine la cantidad óptima de pedido.

b) Determine el costo total óptimo.

c) Dibuje la gráfica de costo total

d) Grafique el comportamiento de los inventarios y determine el punto de reorden si el tiempo de entrega es de 20 días hábiles.

Solución.-

Aplicando la fórmula correspondiente para el modelo básico comercial se obtiene que:

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2(4000)(20000)}{6}} \approx 5164$$

Dadas las características de este modelo, el costo total puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{Q}{2} + CD$$

Nótese que si los pedidos son de 5164 unidades entonces el precio correspondiente es de \$28. Por lo que

$$K(5164) = 4000\,\frac{20000}{5164} + 6\,\frac{5164}{2} + 28(20000) = 590{,}983.87$$

Por otra parte, aun podemos alcanzar un descuento si solicitamos 10000 o 20000 unidades en nuestros pedidos. Por lo que es necesario evaluar $K(10{,}000)$ y $K(20{,}000)$.

Evaluando en $Q = 10{,}000$ obtenemos:

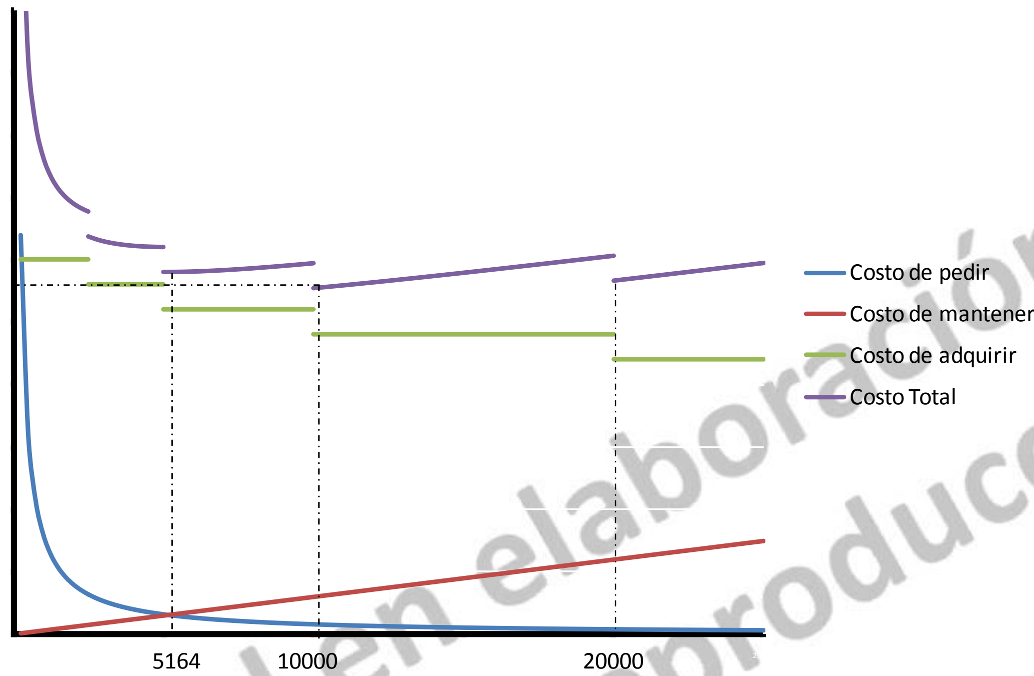
$$K(10000) = 4000\,\frac{20000}{10000} + 6\,\frac{10000}{2} + 27(20000) = 578{,}000.00$$

Evaluando ahora en $Q = 20{,}000$ se obtiene:

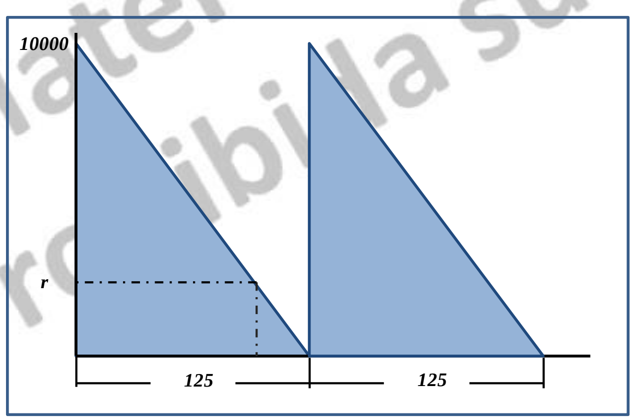
$$K(5164) = 4000\,\frac{20000}{20000} + 6\,\frac{20000}{2} + 26(20000) = 584{,}000.00$$

Observando la función de costo total entonces es posible observar que la cantidad óptima de pedido es $Q^* = 10000$ unidades y el costo total es $K^* = 578{,}000$.

La gráfica de costo total es de la siguiente forma:



Por otra parte, el comportamiento de los inventarios se refleja de la siguiente manera:



Por lo que *r* = (20)(80) = 1600.

4.3 Modelos determinísticos con restricciones

Regularmente los modelos de cantidad económica de pedido se utilizan para productos sobre los cuales se pueden tomar decisiones de manera independiente, sin embargo, existen ocasiones en que las restricciones sobre presupuesto o espacio podrían afectar las decisiones sobre la adquisición de un grupo de artículos.

Por ejemplo, suponga el caso en que una empresa desea adquirir tres diferentes artículos, cuyos datos se presentan en la siguiente tabla:

	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 3
Costo de pedido	\$2000	\$3000	\$2000
Demanda	10000	4000	5000
Costo de adquirir	\$80	\$50	\$60
Costo anual de mantenimiento/unidad	\$12	\$10	\$15

Si se establece el número óptimo de unidades por cada artículo entonces se obtendrá que las cantidades óptimas de pedido son: $Q_1 \approx 1826$, $Q_2 \approx 1549$, $Q_3 \approx 1155$.

Si no existiesen ningún tipo de restricción, estas deberían ser las cantidades de pedido que la empresa debería manejar, sin embargo, suponga que la empresa tiene la restricción de que la cantidad de dinero invertido en inventario no debe superar los $\$250\,000$. Dado que $C_1Q_1 + C_2 Q_2 + C_3Q_3 = 292\,830$, entonces la solución que se había obtenido mediante los cálculos individuales no podría significar una respuesta para el sistema.

Cuando esto sucede entonces es posible tratar de pensar en la función objetivo como en un problema de varias variables sujeto a una restricción. En particular, para este problema sería deseable plantear el siguiente modelo:

$$Min\ K(Q_1, Q_2, Q_3) = A_1 \frac{D_1}{Q_1} + h_1 \frac{Q_1}{2} + C_1D_1 + A_2 \frac{D_2}{Q_2} + h_2 \frac{Q_2}{2} + C_2D_2 + A_3 \frac{D_3}{Q_3} + h_3 \frac{Q_3}{2} + C_3D_3$$

sujeto a la restricción

$$C_1Q_1 + C_2 Q_2 + C_3Q_3 \leq 250\,000$$

Este tipo de problemas de optimización puede resolverse mediante el uso del método de Multiplicadores de Lagrange. En este caso, podríamos plantear una función

$$Min\ K(Q_1, Q_2, Q_3, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} A_i\ \frac{D_i}{Q_i} + h_i\ \frac{Q_i}{2} + C_i D_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} C_i Q_i - 250000 \right)$$

Para resolver este problema se debe realizar la derivada parcial de K respecto a cada una de las variables de decisión, igualar cada una de las derivadas parciales a cero y resolver el sistema de ecuaciones.

En este caso, se obtendrían las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow -A_i \frac{D_i}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} + \lambda C_i = 0 \qquad (1)$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} C_i Q_i = 250000 \qquad (2)$$

Despejando de (1) se obtiene que

$$Q_i = \sqrt{\frac{2\ A_i\ D_i}{h_i + 2\lambda C_i}}$$

Ahora el problema se reduce a encontrar el valor de λ tal que

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} C_i Q_i = 250\,000 \qquad (2)$$

La obtención del valor de λ regularmente se realiza por prueba y error. Por ejemplo, para este problema, con λ = 0.1 los valores para la cantidad de pedido de cada uno de los artículos sería: $Q_1 \approx 1195$, $Q_2 \approx 1095$, $Q_3 \approx 861$. Esto significaría que la cantidad máxima de dinero contenido en inventario en algún punto del tiempo podría ser $C_1Q_1 + C_2\, Q_2 + C_3Q_3 = 202\,010$, por lo que sería conveniente tratar de probar con un valor de λ un poco más pequeño.

La solución para este problema se obtiene con λ = 0.0335 y las cantidades óptimas de pedido para cada artículo son $Q_1 \approx 1518$, $Q_2 \approx 1341$, $Q_3 \approx 1025$, con esto se obtendría que la cantidad máxima en inventario sería $C_1Q_1 + C_2\, Q_2 + C_3Q_3 = 249\,990$.

Ejemplo 4.5

Gaermont Línea Blanca tiene un énfasis especial en cuidar el abastecimiento de sus tres principales artículos: Lavadoras, Estufas y Refrigeradores. Uno de los principales problemas que Gaermont enfrenta es que el número de m^2 disponibles en su almacén es limitado (dispone únicamente de 2500 m^2).

Los datos relevantes para cada uno de estos artículos se presentan en la siguiente tabla:

	Lavadoras	Estufas	Refrigeradores
Costo de pedido	$12000	$10000	$18000
Costo de adquirir	$3000	$4000	$8000
Costo anual de mantenimiento/unidad	$300	$320	$640
Demanda anual	2400	1800	3000
Espacio/unidad (m^2)	1.20	1.60	1.80

Encuentre la cantidad óptima de pedido para cada artículo si:

a) Se disponen únicamente de 2500 m^2 de espacio de los cuales 400 m^2 sirven como pasillos y para almacenar otros artículos.

b) Se disponen únicamente de 1800 m^2 de espacio de los cuales 400 m^2 sirven como pasillos y para almacenar otros artículos.

Solución

a) Resolviendo en forma independiente para cada artículo se obtiene que: $Q_1 \approx 438$, $Q_2 \approx 335$, $Q_3 \approx 411$. Considerando estas cantidades de pedido se puede obtener que el espacio máximo que ocuparían en el almacén estos tres artículos es de: $S_1Q_1 + S_2\,Q_2 + S_3Q_3 = 1801.40$ m^2. Dado que se disponen de 2100 m^2 entonces las cantidades antes mencionadas serían las cantidades óptimas de pedido.

a) Como se había mencionado en el inciso anterior, sin considerar la restricción de espacio las cantidades óptimas de pedido serían: $Q_1 \approx 438$, $Q_2 \approx 335$, $Q_3 \approx 411$. No obstante, en este caso la restricción de espacio si es violada ya que únicamente se dispone de 1400 m^2 para almacenar estos artículos. Por tanto en este caso tendríamos que formular el siguiente problema:

$$Min\ K(Q_1, Q_2, Q_3) = A_1\ \frac{D_1}{Q_1} + h_1\ \frac{Q_1}{2} + C_1D_1 + A_2\ \frac{D_2}{Q_2} + h_2\ \frac{Q_2}{2} + C_2D_2 + A_3\ \frac{D_3}{Q_3} + h_3\ \frac{Q_3}{2} + C_3D_3$$

sujeto a la restricción

$$S_1\,Q_1 + S_2\,Q_2 + S_3\,Q_3 \leq 1400$$

Usando Multiplicadores de Lagrange se llega a la siguiente función:

$$K(Q_1, Q_2, Q_3, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{D_i}{Q_i} + h_i \frac{Q_i}{2} + C_i D_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{3} S_i Q_i - 1400\right)$$

En este caso, se obtendrían las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow -A_i \frac{D_i}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} + \lambda S_i = 0$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} S_i Q_i = 1400$$

Despejando Q_i se obtiene que

$$Q_i = \sqrt{\frac{2\, A_i D_i}{h_i + 2\lambda S_i}}$$

Como habíamos comentado, se hacen prueba con diferentes valores de λ y con $\lambda = 88$ se obtiene que: $Q_1 \approx 336$, $Q_2 \approx 245$, $Q_3 \approx 336$. El espacio máximo que ocuparían estos artículos es 1400 m^2.

Esta es la forma de resolver un problema de inventarios con restricciones utilizando formulación matemática. No obstante, los problemas en que se involucran dos restricciones, por ejemplo, espacios, cantidad de dinero invertido, peso de los artículos, etc., implican el uso de más parámetros y una solución a prueba y error se vuelve sumamente complicada.

En la práctica, existe formas mucho más eficientes de resolver este problema, como por ejemplo utilizar algún software de optimización. En el mercado existen softwares muy potentes, y algunos de ellos son gratuitos si el número de variables es pequeño. Para problemas de este tipo, sería recomendable utilizar alguno de los siguientes programas: LINGO, Wolfram-Alpha, o el Solver de Excel.

En el caso de LINGO, existe una versión estudiantil que podría ser útil para este tipo de problemas, pero el uso de variables es restringida. Wolfram-Alpha es un software de matemáticas, pero para problemas pequeños de optimización funciona de manera muy adecuada. Solver es un complemento de las herramientas de Excel, y al igual que la versión estudiantil de LINGO, podría ayudar a resolver problemas con un número limitado de variables.

En el anexo del capítulo resolveremos este mismo problema utilizando Solver.

4.4 Modelos conjuntos

Se conoce como modelos conjuntos a aquellos modelos que contemplan artículos en donde el costo de pedir es compartido. Regularmente esto sucede cuando los artículos son suministrados por un solo proveedor.

Modelos conjuntos sin costos individuales de ordenar

Suponga que el caso en que *n* artículos son abastecidos por un solo proveedor y que el costo de pedido se comparte entre ellos. Por otra parte, el costo de mantenimiento de cada uno de estos es h_1, h_2, … , h_n.

En este caso, los costos relevantes para el modelo serán el costo de pedir y el costo de mantener. Por otra parte, debemos considerar que una condición deseable en el modelo es que dado que el costo de pedir es compartido por todas los productos, cada pedido contenga algunas unidades de todos ellos, esto significaría que el número de pedido para cada uno de ellos debería ser el mismo.
Considerando lo anterior, la formulación del modelo estará dada por la siguiente expresión:

$$Min\ K(Q_1, Q_2, \dots Q_n) = AN + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{Q_i}{2}$$

sujeto a la condición

$$N = \frac{D_1}{Q_1} = \frac{D_2}{Q_2} = \cdots = \frac{D_n}{Q_n}$$

Con estas igualdades es posible deducir que:

$$Q_2 = \frac{D_2}{D_1} Q_1;\ \ Q_3 = \frac{D_3}{D_1} Q_1;\ \dots;\ Q_n = \frac{D_n}{D_1} Q_1$$

Sustituyendo todas las variables, el modelo anterior se convierte en un modelo de una sola variable y puede resumirse como:

$$Min\ K(Q_1) = A \frac{D_1}{Q_1} + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{D_i}{D_1} \frac{Q_1}{2}$$

Con esto podemos llegar a concluir que

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2A}{\sum_{i=1}^{n} h_i D_i}}\ D_1$$

Sustituyendo este valor se obtiene que, en general:

$$Q_k = \sqrt{\frac{2A}{\sum_{i=1}^{n} h_i D_i}}\ D_k$$

Ejemplo 4.6
Considere los datos siguientes de cuatro diferentes artículos:

	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 3	Artículo 4
Costo del artículo (C)	\$ 60	\$ 90	\$ 40	\$ 50
Costo de mantenimiento (h)	\$ 10	\$ 10	\$ 8	\$ 12
Demanda (D)	4000	5000	3000	2000

El costo de pedir es \$1000 y todos estos artículos son suministrados por un solo proveedor. Determine la cantidad óptima de pedido, el número de pedidos por año y el costo total que deberá pagar la empresa.

Solución
Sustituyendo en la fórmula anterior, podemos obtener que los valores óptimos para cada uno de estos artículos serían: $Q_1 \approx 482$, $Q_2 \approx 602$, $Q_3 \approx 361$, $Q_4 \approx 241$. Por lo que el costo total es K = \$16 609

Modelos conjuntos con costos individuales de ordenar

Supongamos el caso en que n artículos son abastecidos por un solo proveedor y que se tiene un costo conjunto por la realización de un pedido, pero además, existen costos individuales por el pedido de un determinado producto. Denominemos a_i el costo de incluir el artículo i dentro del pedido.

En este caso, lo primero que se determina es el número de pedidos que deberán realizarse. Para hacer esto, se realizan los siguientes pasos:

Paso 1. Obtenga W

$$W = \sqrt{\frac{2(A + \Sigma a_k)(\Sigma D_k C_k)}{i}}$$

Paso 2. Obtenga R_k

$$R_k = W\ \frac{D_k C_k}{\Sigma D_i C_i}$$

Paso 3. Obtenga Q_k

$$Q_k = \frac{R_k}{C_k}$$

Paso 4. Obtenga N

$$N = \frac{D_k}{Q_k}$$

Después de haber obtenido el número de pedidos, entonces deberá determinarse cuál o cuáles artículos deberán incluirse en cada pedido. Para tomar esta decisión se sugiere utilizar el algoritmo de Brown, o bien, el algoritmo de Silver.

El Algoritmo de Brown

El algoritmo de Brown es un procedimiento iterativo, inicialmente se sugiere que todos los artículos se incluyan en todos los pedidos ($n_i = 1$). Después se analiza la posibilidad de que algunos de los artículos se pidan cada dos o más ciclos de inventarios.

El procedimiento finaliza cuando dos iteraciones son iguales y entonces se obtienen los resultados.

Paso B1. Calcule

$$T = \frac{1}{N}$$

Paso B2. Calcule

$$n_i = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2a_i}{h_i D}}$$

Paso B3. Redondee los valores n_i de acuerdo a la siguiente tabla

Rango	n_i
0.000 – 1.414	1
1.414 – 2.449	2
2.449 – 3.464	3
3.464 – 4.472	4
4.472 – 5.477	5
5.477 – 6.480	6
6.480 o más alto	Redondee al entero más cercano

Paso B4. Calcule el valor de T utilizando la siguiente fórmula:

$$T = \sqrt{\frac{2(A + \Sigma\ a_i / n_i)}{\Sigma\, n_i\, h_i\, D_i}}$$

Paso B5. Regresar al Paso 2 en caso de que las iteraciones sean diferentes. En el caso de que las iteraciones sean iguales, entonces el método concluye.

El Algoritmo de Silver

En algunas ocasiones, si se utiliza el algoritmo de Brown podría ser necesario realizar varias iteraciones. Silver propone un método simplificado en donde los resultados se obtienen después de realizar una sola iteración. En este caso, es necesario realizar los siguientes pasos:

Paso S1. Seleccione el artículo *t* que cumple con tener el mínimo valor de la razón

$$\left\{\frac{a_i}{C_i D_i}\right\}$$

Paso S2. Para el artículo seleccionado, encuentre

$$k = \frac{C_t D_t}{A + a_t}$$

Paso S3. Para todos los artículos calcule

$$n_i = \sqrt{k\,\frac{a_i}{C_i D_i}}$$

Paso S4. Redondee de acuerdo a la tabla propuesta en el método de Brown

Para ilustrar los procedimientos descritos en esta sección, resolvamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7

Una compañía de artículos deportivos hace un pedido con ocho diferentes tipos de uniformes a un mismo distribuidor. El costo conjunto de hacer el pedido es de $2 000, el porcentaje anual de mantenimiento de inventario es del 20%. Determine la cantidad económica de pedido para cada artículo.

La demanda anual, el costo unitario y el costo unitario de pedido aparecen en la siguiente tabla.

Artículo	Demanda anual (D_i)	Costo unitario (C_i)	Costo de incluir el artículo en el pedido (a_i)	Costo de mantenimiento (h_i)
1	1 000	80	300	16
2	3 000	40	250	8
3	2 000	20	80	4
4	1 500	100	120	20
5	5 000	50	500	10
6	4 000	60	300	12
7	800	70	600	14
8	3 000	40	200	8

Solución

Como se había mencionado, en este caso necesitamos en primer lugar determinar el número de pedidos (N).

Para esto debemos realizar los siguientes cálculos:

Paso 1.

Calculamos W

$$W = \sqrt{\frac{2(A + \Sigma a_k)(\Sigma D_k C_k)}{i}} = \sqrt{\frac{2(2\,000 + 2\,350)(1'056\,000)}{0.20}} = 214\,326.85$$

Donde i representa el porcentaje del costo financiero de tener un artículo en inventario.

Paso 2.

Obtenemos R_k mediante la fórmula

$$R_k = W\,\frac{D_k C_k}{\Sigma D_i C_i}$$

Con esto llegamos a que:

R_1 = 16 236.88, R_2 = 24 355.32, R_3 = 8 118.24, R_4 = 30 444.16,
R_5 = 50 740.26, R_6 = 48 710.65, R_7 =11 365.82, R_8 = 24 355.32.

Paso 3

Obtenga Q_k dividiendo las razones obtenidas en el paso anterior entre el valor de cada uno de los artículos, esto es,

$$Q_k = \frac{R_k}{C_k}$$

De esta manera obtenemos que $Q_1 = 202.96$, $Q_2 = 608.88$, $Q_3 = 405.92$, $Q_4 = 304.44$, $Q_5 = 1\ 014.81$, $Q_6 = 811.84$, $Q_7 = 162.37$, $Q_8 = 608.88$.

Una observación importante en este punto es que, si al aplicar el algoritmo de Brown o el algoritmo de Silver obtuviésemos que $n_i = 1$ para todos los artículos, entonces las cantidades óptimas de pedido serían las que se describen en este inciso.

Paso 4

Obtener el valor de N sustituyendo la siguiente fórmula para cualquiera de los artículos

$$N = \frac{D_k}{Q_k}$$

En este caso, tomando el primer artículo obtenemos que

$$N = \frac{D_1}{Q_1} = \frac{1000}{202.96} = 4.92705$$

Si analizamos los resultados obtenidos hasta el momento, entonces se obtiene que el costo total lo podemos calcular como:

$$K(Q_1, Q_2, \dots Q_8) = AN + N\sum_{i=1}^{8} a_i + \sum_{i=1}^{8} h_i \frac{Q_i}{2} = 42\ 865.38$$

Si se desglosan estos costos, entonces se puede comprobar que el costo anual de pedir y el costo anual de mantener son iguales.

Ahora es conveniente aplicar el algorimo de Brown y el algoritmo de Silver y comparar los resultados.

<u>Aplicación del Algoritmo de Brown</u>

Paso B1

$$T = \frac{1}{N} = 0.20296$$

Paso B2.

Calculamos

$$n_i = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2a_i}{h_i D_i}}$$

con lo que $n_1 = 0.954$, $n_2 = 0.711$, $n_3 = 0.697$, $n_4 = 0.441$, $n_5 = 0.697$, $n_6 = 0.551$, $n_7 = 1.613$, $n_8 = 0.636$.

Paso B3

Por lo que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_8 = 1$, y $n_7 = 2$.

Paso B4.

Con esto, volvemos a calcular T,

$$T = \sqrt{\frac{2(A + \Sigma\ a_i/\ n_i)}{\Sigma\, n_i\ h_i\ D_i}} = \sqrt{\frac{2(2000 + 2050)}{222\ 400}} = 0.19084$$

Paso B5.

Calculando nuevamente los n_i se obtiene que $n_1 = 1.014$, $n_2 = 0.756$, $n_3 = 0.741$, $n_4 = 0.469$, $n_5 = 0.741$, $n_6 = 0.586$, $n_7 = 1.715$, $n_8 = 0.676$.

Por lo que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_8 = 1$, y $n_7 = 2$.

Dado que la solución es igual a la iteración anterior, se terminan las iteraciones.

Esta solución significa que las cantidades óptimas de pedido para los artículos son los siguientes: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 8 son como se habían calculado anteriormente. Es decir, $Q_1 = 202.96$, $Q_2 = 608.88$, $Q_3 = 405.92$, $Q_4 = 304.44$, $Q_5 = 1\ 014.81$, $Q_6 = 811.84$ y $Q_8 = 608.88$. Para el artículo 7 los pedidos se deben hacer cada dos periodos, por lo que $Q_7 = 324.74$.

Los cálculos del costo total se obtienen de la siguiente manera:

$$K(Q_1, Q_2, \dots Q_8) = AN + N\sum_{i=1}^{8}\frac{a_i}{n_i} + \sum_{i=1}^{8} h_i\frac{Q_i}{2} = 42\ 523.84$$

<u>Aplicación del Algoritmo de Silver</u>

Paso S1.

Seleccione el artículo t que cumple con tener el mínimo valor de la razón $\left\{\frac{a_i}{C_i D_i}\right\}$

En este caso, el artículo seleccionado es el cuarto.

Paso S2.

Calculamos $k = \frac{C_4 D_4}{A + a_4}$; y obtenemos que k = 70.7547

Paso S3.

Finalmente, calculamos $n_i = \sqrt{k \frac{a_i}{C_i D_i}}$

Paso S4.

Con esto obtenemos que: $n_1 = 0.515$, $n_2 = 0.384$, $n_3 = 0.376$, $n_4 = 0.238$, $n_5 = 0.376$, $n_6 = 0.297$, $n_7 = 0.871$, $n_8 = 0.343$.

Por lo que concluimos que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = 1$.

Es decir, el algoritmo de Silver sugiere que: $Q_1 = 202.96$, $Q_2 = 608.88$, $Q_3 = 405.92$, $Q_4 = 304.44$, $Q_5 = 1\,014.81$, $Q_6 = 811.84$, $Q_7 = 162.37$, $Q_8 = 608.88$.

Por lo que podemos concluir que, en este caso, el algoritmo de Brown es el más eficiente ya que es el que nos provee del menor costo total.

4.6 La Formulación de Modelos de Inventarios

Como anteriormente se había mencionado, la forma de administración de inventarios podría tener características diferentes en cada organización. Por ejemplo, hasta ahora se ha considerado que el costo de mantenimiento anual por unidad regularmente podría ser representado como un porcentaje del valor del producto; no obstante, si la organización decidiese rentar un espacio en algún almacén para guardar este producto, entonces el costo de esta renta no necesariamente estaría reflejado en los costos que los modelos estudiados hasta el momento han considerado. Este costo de renta de almacén, por ejemplo, debería considerarse como un costo adicional y que es proporcional al tamaño máximo que ocupa el inventario dentro de dicho almacén.

Realizar una formulación adecuada de todos los costos involucrados en los inventarios es fundamental para tomar decisiones que realmente nos permitan una administración eficiente en este rubro. Esta sección está dedicada a estudiar diferentes casos en los que es necesario realizar una formulación de estos modelos.

La siguiente tabla, contiene algunos de los costos que deberían estar presentes en el modelo y que serán de mucha utilidad si se desea construir una formulación diferente a los modelos presentados en esta sección.

TABLA 4.1 COSTOS DE INVENTARIOS DEPENDIENDO DEL MODELO A UTILIZAR

	Costo de Pedir	Costo de mantener proporcional al inventario promedio	Costo de mantener proporcional al inventario máximo	Costo de unidad faltante independiente del tiempo	Costo de unidad faltante dependiente del tiempo
Modelo Comercial sin Agotamiento	$A\frac{D}{Q}$	$h\frac{Q}{2}$	mQ	No Aplica	No Aplica
Modelo Productivo sin Agotamiento	$A\frac{D}{Q}$	$h\frac{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)}{2}$	$mQ(1-D/P)$	No Aplica	No Aplica
Modelo Comercial con Agotamiento	$A\frac{D}{Q}$	$h\frac{(Q-b)^2}{2Q}$	$m(Q-b)$	$\pi b\frac{D}{Q}$	$\pi_t\frac{b^2}{2Q}$
Modelo Productivo con Agotamiento	$A\frac{D}{Q}$	$h\frac{[Q(1-D/P)-b]^2}{2Q(1-D/P)}$	$m\left[Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-b\right]$	$\pi b\frac{D}{Q}$	$\pi_t\frac{b^2}{2Q\left(1-\frac{D}{P}\right)}$

Ejemplo 4.8

Plantee un modelo de inventarios considerando las siguientes características:

a) La demanda es constante y conocida.
b) Existe un costo fijo asociado con el realizar una orden.
c) El costo de conservación de inventario representa un costo proporcional al tamaño máximo del inventario.
d) Los faltantes son reordenados con un costo fijo por unidad faltante por año.
e) Los artículos son comprados y el pedido es completado en una sola entrega.

Encuentre $K(Q, b)$ y las fórmulas para Q^* y b^*.

Solución.-

La característica de que la demanda sea constante y conocida (D) nos permite concluir que es factible crear una función de costo total en un horizonte de tiempo infinito.

Por otra parte, el inciso e) de inmediato nos coloca en el supuesto de un modelo comercial. Además, el inciso d) nos refiere a que es un modelo con agotamientos.

Con estas indicaciones es posible concluir que es un modelo comercial con agotamientos.

Por otra parte, en inciso b) nos habla de un costo de pedir; el inciso c) nos describe los costos de mantenimiento de inventario asociado al tamaño máximo de inventario y el inciso d) nos habla sobre un costo fijo por unidad faltante por año.

De esta manera, el costo total anual se puede representar mediante la siguiente expresión.

$$K(Q,b) = \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ pedir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ mantener \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ agotamiento \end{pmatrix}$$

$$K(Q,b) = A\,\frac{D}{Q} + m(Q-b) + \pi_t \frac{b^2}{2Q}$$

Dado que el costo total depende de dos variables (Q y b), entonces se obtienen las derivadas parciales, se igualan a cero y se resolverá el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -A\,\frac{D}{Q^2} + m - \frac{\pi_t}{2}\frac{b^2}{Q^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -\,m + \pi_t \frac{b}{Q}$$

Igualando estas expresiones a cero obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-A\,\frac{D}{Q^2} + m - \frac{\pi_t}{2}\frac{b^2}{Q^2} = 0 \qquad (9)$$

$$-m + \frac{\pi_t b}{Q} = 0 \qquad (10)$$

Multiplicando la ecuación (10) por Q y despejando b obtenemos:

$$b = \frac{mQ}{\pi_t} \qquad (11)$$

Sustituyendo ahora el valor de b en la ecuación (9)

$$-\frac{AD}{Q^2} + m - \frac{\pi_t \left(\frac{mQ}{\pi_t}\right)^2}{2Q^2} = 0$$

Finalmente, despejando Q de esta ecuación se obtiene que

$$Q = \sqrt{\frac{2\pi_t AD}{m(2\pi_t - m)}} \qquad (12)$$

Ejemplo 4.9

Plantee un modelo de inventarios considerando las siguientes características:

a) La demanda es constante y conocida.

b) Existe un costo fijo asociado con el realizar una corrida de producción.

c) El costo de conservación de inventario consta de dos partes: un cargo proporcional al inventario promedio y un costo proporcional al tamaño máximo del inventario.

d) Los faltantes son reordenados con un costo fijo por unidad faltante por año.

e) Los artículos son producidos.

Encuentre $K(Q, b)$ y las fórmulas para Q^* y b^*.

Solución

Obviamente, con el inciso b) y el inciso d) se concluye que es un modelo productivo con agotamientos.

De nuevo podemos pensar que el costo total estará constituido por tres partes:

$$K(Q,b) = \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ pedir \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ mantener \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Costo\ anual \\ de\ agotamiento \end{pmatrix}$$

$$K(Q,b) = A\,\frac{D}{Q} + m\left[Q\left(1-\frac{D}{P}\right) - b\right] + h\frac{\left[Q\left(1-\frac{D}{P}\right)-b\right]^2}{2Q\left(1-\frac{D}{P}\right)} + \pi_t\frac{b^2}{2Q\left(1-\frac{D}{P}\right)}$$

Obteniendo las derivadas parciales e igualando a cero:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -A\,\frac{D}{Q^2} + m\left(1-\frac{D}{P}\right) + \frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right) - \frac{h}{2\left(1-\frac{D}{P}\right)}\frac{b^2}{Q^2} - \frac{\pi_t}{2\left(1-\frac{D}{P}\right)}\frac{b^2}{Q^2} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -\,m - h + h\frac{b}{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)} + \pi_t\frac{b}{Q\left(1-\frac{D}{P}\right)} = 0$$

De donde obtenemos que

$$b = \frac{m+h}{h+\pi_t}Q\left(1-\frac{D}{P}\right) \qquad \text{y} \qquad Q = \sqrt{\frac{2AD(h+\pi_t)}{[2m\pi_t + h\pi_t - m^2]\left(1-\frac{D}{P}\right)}}$$

Además de los dos ejemplos anteriores, existen algunos casos en los que la particularidad de una empresa exige consideraciones especiales en la formulación. Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.10

Suponga que un establecimiento comercial tiene una demanda anual de 6000 unidades de su principal producto. El costo de realizar un pedido lo ha calculado en $1000, el costo de adquisición de cada artículo es de $40 y el costo de mantenimiento lo ha estimado en un 20% del valor del inventario promedio. Este costo de mantenimiento no incluye la renta del almacén, el cual se estima en $4 por el número máximo de unidades almacenadas. Este negocio tiene la posibilidad de entregar los productos en forma retroactiva, sin embargo, el costo de manejar estos pedidos es de $10 por unidad por año. Determine la política óptima que debería de seguir este establecimiento.

Solución

La función de costo total para esta empresa es representada como se muestra a continuación:

$$K(Q,b) = A\,\frac{D}{Q} + h\frac{(Q-b)^2}{2Q} + m(Q-b) + \pi_\tau\frac{b^2}{2Q}$$

Obteniendo las derivadas parciales e igualándolas a cero se obtiene

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -A\,\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{b^2}{Q^2}\right) + m - \frac{\pi_\tau}{2}\frac{b^2}{Q^2} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = h\left(\frac{b}{Q} - 1\right) - m + \frac{\pi_\tau b}{Q} = 0 \qquad (14)$$

Despejando b en (14) se obtiene

$$b = \frac{(m+h)Q}{\pi_\tau + h}$$

Sustituyendo b en la ecuación (13) y despejando Q se obtiene

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{\pi_\tau(h+2m)}}$$

Sustituyendo los valores del problema, se puede obtener que

$$Q = \sqrt{\frac{2(1000)(6000)}{10(8+8)}} = 274 \qquad \text{y} \qquad b = \frac{(4+8)Q}{10+8} = 183$$

Por otra parte, también podría suceder que los costos no pudiesen ser expresados por una misma ecuación, sino que cambiasen de acuerdo al tamaño de pedido que fuese considerado.

El siguiente ejemplo puede ser sumamente ilustrativo para esta afirmación.

Ejemplo 4.11

Una compañía que se dedica a la comercialización de azulejos tiene una demanda constante de 60 000 m^2 al año. El costo de realizar la orden se ha calculado en \$11,000 (incluyendo los costos de transportación). El costo del producto es de \$80, el costo de conservación del inventario se ha calculado en el 15% del valor del inventario promedio. Este costo de conservación de inventario no incluye el costo de la renta de los almacenes. Estos costos de almacenaje pueden calcularse de la siguiente manera:

El almacén 1 le cobra a la empresa \$7 por el número máximo de unidades almacenadas durante el año, sin embargo, este almacén tiene una capacidad máxima de almacenaje de 6 000 m^2 de este piso. Por otra parte, 4,000 m^2 de este almacén permite guardar el producto bajo techo y el resto son almacenados a la intemperie.

El almacén 2 le cobra a la empresa \$18 por el número promedio de unidades almacenadas durante el año y no tiene restricciones sobre su capacidad máxima de almacenaje.

La empresa desea obtener la cantidad de pedido óptima considerando la siguiente política en el manejo del inventario:

Si la cantidad óptima de pedido es de hasta 6,000 unidades, rentar el espacio únicamente en el primer almacén y obviamente hará uso de las unidades que se encuentran a la intemperie.

Si la cantidad de pedido supera las 6,000 unidades, utilizar toda la capacidad del primer almacén y el resto del pedido guardarlo en el segundo almacén. No obstante, para evitar que el producto pueda sufrir daños por causa del sol o la lluvia, la empresa primero hará uso de las unidades que se encuentran a la intemperie en el primer almacén; inmediatamente después de que estas unidades hayan sido agotadas, consumirá los artículos que se encuentran guardados en el segundo almacén. Finalmente acabará utilizando el resto de las unidades que se encontraban guardadas bajo techo en el primer almacén.

Finalmente, también suponga que la empresa que le surte este producto le ha propuesto un descuento del 3% si la cantidad de pedido supera las 10,000 unidades

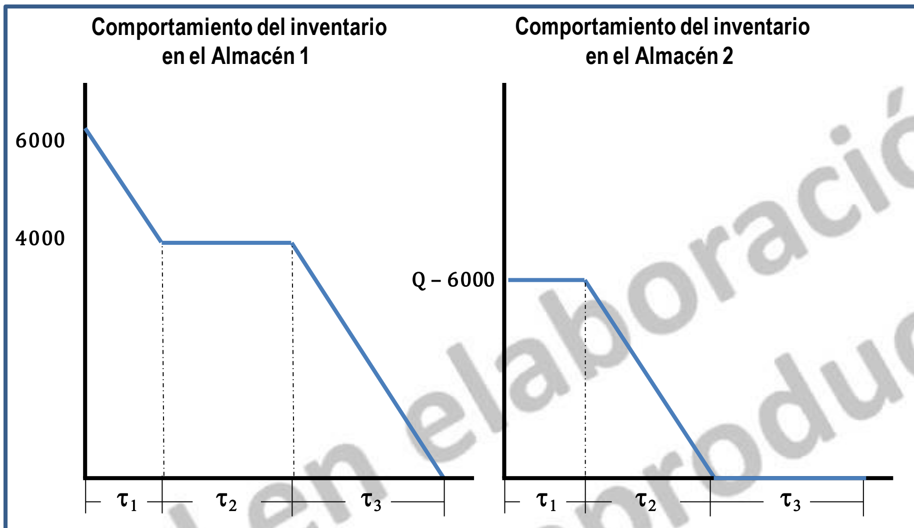
Determine la cantidad óptima de pedido y el costo total óptimo anual de la compañía

Solución.

Si la cantidad de pedido no rebasa las 6,000 unidades, entonces el costo total de este inventario puede ser representado mediante la siguiente expresión:

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + m_1 Q + C_1 D$$

Por otra parte, si la cantidad de pedido supera las 6,000 unidades, entonces el inventario en cada uno de los almacenes se comportará de la siguiente manera:



Recuerde que el costo de almacén del almacén 1 es proporcional al tamaño del inventario máximo, por lo que este costo deberá ser representado por la expresión: m_1Q.

Por otra parte, el almacén 2 tiene un costo por el inventario promedio, por lo que será útil obtener el inventario promedio en este caso.

Note que:

$$\bar{I} = (Q - 6000)\frac{\tau_1}{\tau} + \frac{(Q - 6000)}{2}\,\frac{\tau_2}{\tau} + 0\,\frac{\tau_3}{\tau} \qquad (17)$$

Note además lo siguiente:

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{2000}{\tau_1} = \frac{Q - 6000}{\tau_2} = \frac{4000}{\tau_3}$$

Por lo que

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{2000}{Q}; \qquad \frac{\tau_2}{\tau} = \frac{Q - 6000}{Q} \qquad y \qquad \frac{\tau_3}{\tau} = \frac{4000}{Q}$$

Sustituyendo en (17)

$$\bar{I} = (Q - 6000)\frac{2000}{Q} + \frac{(Q - 6000)^2}{2Q} \qquad (18)$$

Por lo que si $Q > 6000$, entonces:

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + 6000\,m_1 + \left[(Q-6000)\frac{2000}{Q} + \frac{(Q-6000)^2}{2Q}\right]m_2 + C_1 D$$

Finalmente si $Q \geq 10000$, entonces:

$$K(Q) = A\,\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + 6000\,m_1 + \left[(Q-6000)\frac{2000}{Q} + \frac{(Q-6000)^2}{2Q}\right]m_2 + C_2 D$$

Resumiendo esto se obtiene que:

$$K(Q) = \begin{cases} A\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + m_1\,Q + C_1 D & si\ Q \leq 6000 \\ A\,\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + 6000\,m_1 + \left[\frac{(Q-2000)(Q-6000)}{2Q}\right]m_2 + C_1 D & si\ 6000 < \ Q < 10\,000 \\ A\,\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2} + 6000\,m_1 + \left[\frac{(Q-2000)(Q-6000)}{2Q}\right]m_2 + C_2 D & si\ Q \geq 10000 \end{cases}$$

Para obtener el óptimo en este problema es necesario analizar la función.

Primero se hará la derivada de $\mathrm{K}(Q)$ en el primer intervalo. En este caso,

$$K'(Q) = -A\,\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} + m_1$$

Igualando a cero y despejando Q se obtiene

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{h + 2m_1}}$$

Sustituyendo los valores se obtiene que Q = 7125. Dado que este valor se encuentra fuera del intervalo en donde la función está definida con esta expresión, entonces se puede comprobar que esto implicaría que la función es decreciente en el intervalo (0, 6000]. Por lo que el valor mínimo de esta expresión se puede obtener cuando Q = 6000. Por lo tanto, $\mathrm{K}(6000) = 4'988{,}000$ y este valor representa el mínimo de la función en este intervalo.

Ahora se obtendrá la derivada de $K(Q)$ en el segundo intervalo.

$$K'(Q) = -A\ \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} + \frac{m_2}{2} - \frac{6'000{,}000}{Q^2}$$

Igualando a cero y despejando Q se obtiene

$$Q = \sqrt{\frac{2(AD + 6'000{,}000)}{h + m_2}}$$

Sustituyendo los valores se obtiene que Q = 6663. Y dado que el valor de Q se encuentra entre las 6 000 y las 10 000 unidades, entonces se procede a su evaluación. En este caso, $K(6663) = 4\ 985\ 208$.

Finalmente, considerando Q = 10 000, entonces $K(10\ 000) = 4\ 852\ 800$.

Esto significa que nos conviene realizar pedidos de 10 000 unidades para alcanzar el descuento ofrecido.

4.7 Resumen del Capítulo

En este capítulo se ha revisado la literatura clásica de la teoría de inventarios, y se han revisado también las situaciones más frecuentes (como descuentos, restricciones y pedidos conjuntos) que podrían alterar este tipo de cálculos. La última sección de este capítulo nos abre la posibilidad de crear formulaciones diferentes a los modelos clásicos considerando las características particulares de las empresas.

Modelo Básico Comercial (EOQ)

Costo Total: $K = A\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2}$

Cantidad Optima de Pedido: $Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$

Modelo Básico Productivo (EPQ)

Costo Total: $K = A\frac{D}{Q} + h\frac{Q\ (1-D/P)}{2}$

Cantidad Optima del lote de Producción: $Q = \sqrt{\frac{2AD}{h(1-D/P)}}$

Modelo Comercial con Agotamientos (EOQ con faltantes)

Costo Total: $K = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{(Q-b)^2}{2Q} + \pi b\frac{D}{Q} + \pi_t\frac{b^2}{2Q}$

Cantidad Óptima de Pedido: $Q = \sqrt{\frac{2AD(h+\pi_t)-\pi^2D^2}{h\,\pi_t}}$

Nivel Óptimo de Faltantes: $b = \frac{hQ-\pi D}{h+\pi_t}$

Modelo Productivo con Agotamientos (EPQ con faltantes)

Costo Total: $K = A\,\frac{D}{Q} + h\,\frac{[Q(1-D/P)-b]^2}{2Q\,(1-D/P)} + \pi b\frac{D}{Q} + \pi_t\frac{b^2}{2Q(1-D/P)}$

Cantidad Óptima de Pedido: $Q = \sqrt{\frac{2AD(h+\pi_t)-\pi^2D^2(1-D/P)}{h\,\pi_t(1-D/P)}}$

Nivel Óptimo de Faltantes: $b = \frac{(hQ-\pi D)\,(1-D/P)}{h+\pi_t}$

4.8 Problemas

1. El aeropuerto JFK utiliza 50 000 focos anualmente (considere 360 días al año). Cada vez que se hace un pedido de estos focos se incurre en un costo de $1 000. Cada luz cuesta $40 y el costo de mantenimiento de inventario es de $6/luz/año. La demanda ocurre a una tasa constante y no se permiten agotamientos.
   a. ¿Cuál es el costo total óptimo?,
   b. ¿cuántos pedidos se harán este año?,
   c. ¿cuántos días transcurrirán entre la colocación de los pedidos?

2. Cada día, una gasolinera vende 3 000 litros de gasolina (considere 360 días al año). Cada vez que el proveedor rellena los tanques de la estación, le cobra a la gasolinera $300. El costo de cada litro es de $1. El costo anual de mantenimiento de un litro se ha estimado en $0.15.
   a. ¿cuál es la cantidad óptima de pedido?
   b. ¿cuántos pedidos por año se harán?
   c. Si el plazo de entrega es de 12 días, ¿cuál es el punto de reabastecimiento?
   d. Si el plazo de entrega es de 24 días, ¿cuál es el punto de reabastecimiento?

3. Una empresa manufacturera tiene una tasa de demanda constante de 10 000 unidades al año. La máquina usada para manufacturar este artículo tiene una tasa de producción de 120 000 unidades al año, por lo que la producción se realizará en lotes. El costo de preparación de la corrida de producción es de $400 y el costo de la unidad variable de producto es $25.
   a. Si el costo de conservación de inventario es el 15% del valor del inventario promedio, ¿cuál es el tamaño adecuado del lote de producción?
   b. Si esta empresa utiliza lotes de tamaño 2 000, ¿cuál es el costo de conservación de inventario que hace que este tamaño de lote sea óptimo?

4. Una farmacia vende 30 frascos de antibióticos por semana (suponga 50 semanas al año). Cada vez que pide antibióticos, hay un costo fijo de pedidos de $100 y un costo de $100 por frasco. Suponga que el costo de mantenimiento anual es de 20% del costo de un frasco de antibióticos, y suponga que los antibióticos se echan a perder y no se pueden vender si pasan más de una semana en inventario.
   a. ¿Cada cuánto tiempo debe la farmacia hacer sus pedidos?
   b. ¿cuántos frascos de antibióticos debe pedir?

5. Una cafetería en el centro de la ciudad vende 2 500 litros de helado cada mes a un ritmo constante. El gerente ha decidido abastecer su inventario al principio de cada mes. El precio del helado al mayoreo es de $90 por litro. Suponga que el costo anual de mantenimiento de inventario es el 20% del valor del nivel promedio de inventarios. El costo de realizar un pedido se estima en $500.
   a. Determine el costo total anual con la política establecida por su gerente.
   b. Determine el ahorro que podría generar a esta cafetería utilizar una política de pedidos con la cantidad óptima.

6. Una compañía puede producir 300 computadoras por día. El costo de preparación para una corrida de producción es de $6 000. El costo de tener una computadora en inventario durante un año es de $200. La demanda de los clientes es de 3000 computadoras por mes (suponga que 1 mes = 25 días).
   a. ¿cuál es el tamaño óptimo de la corrida de producción?,
   b. ¿cuántas corridas deben hacerse por año?,
   c. ¿cuál es el punto de reorden si el tiempo que se necesita para preparar la producción es de 35 días?

7. Juirpul es uno de los gigantes manufactureros de aparatos eléctricos para el hogar. En éstos usa motores eléctricos que compra de otra empresa a una tasa constante. El total de sus costos de compra durante un año es de $4’200,000. El costo de cada pedido es de $12 000 y el costo anual de mantenimiento es el 10% del valor del inventario promedio.
   a. Determine el valor en dólares de la cantidad óptima de pedido
   b. ¿Cuántas veces en el año debe Juirpul colocar sus pedidos?
   c. ¿Cuál es la duración óptima del ciclo en días (considere 250 días al año)

8. Whiplash es una tienda de discos especializada en música de jazz. La tienda ha tenido un grado considerable de éxito en los últimos años, pues ha realizado ventas al menudeo por $4’000,000 al año. Las ventas se producen a un ritmo constante en el curso del año. Whiplash compra sus discos a una importante compañía del ramo. El precio de venta al menudeo es igual a 7/4 del costo original para S y H. El costo de pedido por cada embarque es de $7 500, independiente de la magnitud del pedido. Los costos anuales de mantenimiento de inventario representan 12% del costo del nivel promedio de inventario. Considere 300 días al año.
   a. ¿cuál es el valor en dólares de la cantidad de pedido óptima?
   b. ¿con cuánta frecuencia debe colocar sus pedidos S y H cada año?

9. Un producto es comprado y recibido en lotes de tamaño Q. La tasa de demanda anual es constante y de 10,000 unidades; el costo fijo por orden es de $640, el costo variable por unidad es de $40, el costo de conservación de inventario es el 25% al año; no se permiten faltantes. El costo de conservación de inventario no incluye el costo de la renta del almacén.
   Los costos de almacenaje pueden calcularse de la siguiente forma:
   El almacén 1 le cobra a la empresa $10 por el promedio de unidades almacenadas durante el año, sin embargo, este almacén tiene una capacidad máxima de almacenaje de 500 unidades.
   El almacén 2 le cobra a la empresa $15 por el promedio de unidades almacenadas durante el año y no tiene restricciones sobre su capacidad máxima de almacenaje.
   La empresa ha decidido hacer pedidos de tamaño Q y rentar en primero lugar espacio del almacén 1. Si Q excede de 500 unidades, entonces rentar espacio en el almacén 2 para la cantidad restante.
   Determine la cantidad óptima de pedido y el costo que la empresa le pagará a cada almacén.

10. Formule un modelo para el costo total anual en función de Q y b dadas las siguientes características, obtenga además Q* y b*:
    a) La demanda es constante y conocida
    b) Existe un costo fijo asociado con el realizar una orden
    c) El costo de conservación de inventario consta de dos partes: un cargo proporcional al valor del inventario promedio y un costo proporcional al tamaño máximo del inventario
    d) Los faltantes son reordenados con un costo fijo por cada unidad faltante
    e) Los artículos son comprados y el pedido es completado en una sola entrega.

11. Una empresa consultora está tratando de determinar cómo minimizar los costos anuales asociados con la compra de papel continuo. Cada vez que se hace un pedido se incurre en un costo de 20 dólares. El precio por caja de papel depende del número de cajas pedidas (véase tabla 1). El costo de retención anual es 20% del valor del inventario en dólares. Durante cada mes, la empresa consultora utiliza 80 cajas de papel continuo. Determine la cantidad óptima de pedido y el número de pedidos hechos cada año.

Número de cajas pedidas	Precio por caja
$Q < 300$	\$10.00
$300 \leq Q < 500$	\$ 9.80
$500 \leq Q$	\$ 9.70

12. Cada año, Xoxo Stores vende 10 000 cajas de soda. La compañía intenta determinar cuántas cajas debe pedir cada vez. El costo de procesar cada pedido es de \$300.00 y el costo de tener una caja de soda en inventario durante un año es 20% del precio de compra. El proveedor de soda ofrece a Xoxo el programa de descuentos de cantidad mostrado en la siguiente tabla. ¿Cuál es la cantidad óptima de pedido?

Tamaño de pedido	Precio por caja
0 – 99	\$20.00
200 – 199	\$19.50
200 – 499	\$19.00
500 o más	\$18.75

13. Considere los datos siguientes de cuatro diferentes artículos:

	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 3	Artículo 4
Costo de pedir (A)	\$500	\$3000	\$2000	\$1000
Costo del artículo (C)	\$ 60	\$ 90	\$ 40	\$ 50
Costo de mantenimiento (h)	\$ 12	\$ 10	\$ 8	\$ 10
Demanda (D)	4000	5000	3000	2000
Espacio que ocupa (S)	2 m^2	3 m^2	1.5 m^2	1 m^2

a. Encuentre la cantidad óptima de pedido de cada artículo si se desea que la cantidad de dinero invertido en inventario nunca supere los \$220,000.
b. Encuentre la cantidad óptima de pedido de cada artículo si la capacidad máxima que puede alojar el almacén es de 7 000 m^2.
c. Encuentre la cantidad óptima de pedido de cada producto si la cantidad máxima de dinero invertido debe ser de \$190,000 y la capacidad máxima que puede alojar el almacén es de 6500 m^2.
d. Encuentre la cantidad óptima de pedido de cada producto si la cantidad máxima de dinero invertido debe ser de \$240,000 y la capacidad máxima que puede alojar el almacén es de 7800 m^2.

14. Considere los datos siguientes de cuatro diferentes artículos:

	Artículo 1	Artículo 2	Artículo 3	Artículo 4
Costo del artículo (C)	\$ 60	\$ 90	\$ 40	\$ 50
Costo de mantenimiento (h)	\$ 12	\$ 10	\$ 8	\$ 10
Demanda (D)	4000	5000	3000	2000

El costo de pedir es \$1000. Sin embargo, todos estos artículos son suministrados por un solo proveedor, el cual ha puesto como condición que los productos sean pedidos en un mismo tiempo (es decir, si se solicitan 1000 unidades del artículo 1, entonces los pedidos para este producto deberán realizarse cada tres meses, y esto significará que todos los demás artículos deberán ordenarse cada tres meses).
Determine la cantidad óptima de pedido, el número de pedidos por año y el costo total que deberá pagar la empresa de acuerdo a esta condición.

15. Una compañía fabrica balones de futbol. El costo de producción de cada balón es un poco variable dependiendo del número de unidades que se fabricarán. En particular, se ha calculado el costo de fabricación tal y como aparece en la siguiente tabla:

Núm. de balones	Costo por balón
1 – 499	$ 45.00
500 – 999	$ 43.00
1000 – 2499	$ 42.00
más de 2500	$ 41.00

El costo anual de mantenimiento por unidad se ha calculado en $9, y el costo de realizar una corrida es de $2000. La capacidad de producción es de 12 000 unidades por año. Por otra parte, la compañía ha calculado que la demanda de este producto es de 1 800 unidades al año.
Determine el tamaño del lote óptimo de producción.

16. Una compañía hace una lista detallada de dos artículos. Los datos pertinentes de cada uno de ellos se muestran en la siguiente tabla. Determine la política óptima de inventarios si no se permite que haya déficit y si la inversión promedio en inventarios debe mantenerse abajo de $2000.

	Artículo 1	Artículo 2
Demanda anual	6000	4000
Costo por unidad	$40	$35
Costo de mantenimiento	$12	$8.75
Costo de pedir	$350	$200

Anexo 1

Paso 1

Construya en Excel una tabla similar a la del problema tal como se muestra en la siguiente figura

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Lavadoras	Estufas	Refrigeradores							
3		Costo de pedido	12000	10000	18000							
4		Costo de adquirir	3000	4000	8000							
5		Costo anual de mantenimiento/unidad	300	320	640							
6		Demanda anual	2400	1800	3000							
7		Espacio/unidad (m^2)	1.2	1.6	1.8							
8												
9												
10		Cantidad de Pedido										
11		Costo Total por artículo					Costo Total Conjunto					
12												
13		Espacio Total Ocupado					Espacio Total Conjunto			Espacio Disponible		
14												
15												

En la celda C10, coloque la siguiente leyenda: "= SQRT(2*C3*C6/C5)". En el caso de que Excel esté habilitado en español, en lugar de SQRT coloque RAIZ.

Esta fórmula representa la Q^* en el modelo básico comercial.

Paso 2.

Jale la fórmula a la derecha hasta la celda E10.

Deberá obtener los siguientes resultados

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Lavadoras	Estufas	Refrigeradores							
3		Costo de pedido	12000	10000	18000							
4		Costo de adquirir	3000	4000	8000							
5		Costo anual de mantenimiento/unidad	300	320	640							
6		Demanda anual	2400	1800	3000							
7		Espacio/unidad (m^2)	1.2	1.6	1.8							
8												
9												
10		Cantidad de Pedido	438.18	335.41	410.79							
11		Costo Total por artículo					Costo Total Conjunto					
12												
13		Espacio Total Ocupado					Espacio Total Conjunto			Espacio Disponible		
14												
15												

Paso 3.
En la celda C11, coloque la siguiente leyenda: "= C3*C6/C10 + C5*C10/2".
Esto corresponde a la fórmula de costo total del modelo básico comercial.
Después, jale la fórmula a la derecha hasta la celda E11.

En la celda C13, coloque la siguiente leyenda: "= C10*C7"
Esto corresponderá al espacio que ocupa cada tipo de artículo en el almacén.
Después, jale la fórmula a la derecha hasta la celda E13.

Deberá obtener los siguientes resultados:

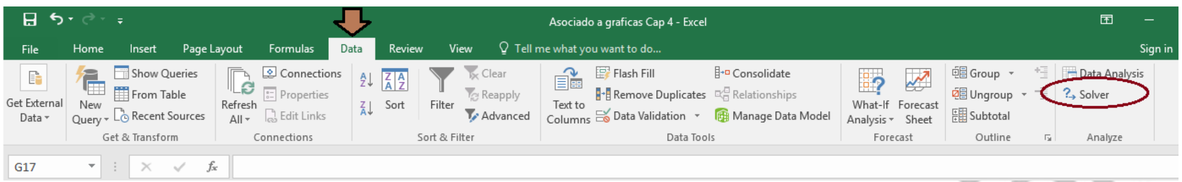
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Lavadoras	Estufas	Refrigeradores							
3		Costo de pedido	12000	10000	18000							
4		Costo de adquirir	3000	4000	8000							
5		Costo anual de mantenimiento/unidad	300	320	640							
6		Demanda anual	2400	1800	3000							
7		Espacio/unidad (m^2)	1.2	1.6	1.8							
8												
9												
10		Cantidad de Pedido	438.18	335.41	410.79							
11		Costo Total por artículo	131,453.41	107,331.26	262,906.83		Costo Total Conjunto					
12												
13		Espacio Total Ocupado	525.81	536.66	739.43		Espacio Total Conjunto			Espacio Disponible		
14												
15												

Paso 4.
En la celda H11, coloque la siguiente leyenda: "= C11 + D11 + E11".
En la celda H13, coloque la siguiente leyenda: "= C13 + D13 + E13".
En la celda K13, coloque el espacio total disponible para el problema, en este caso, podría ser 1400.

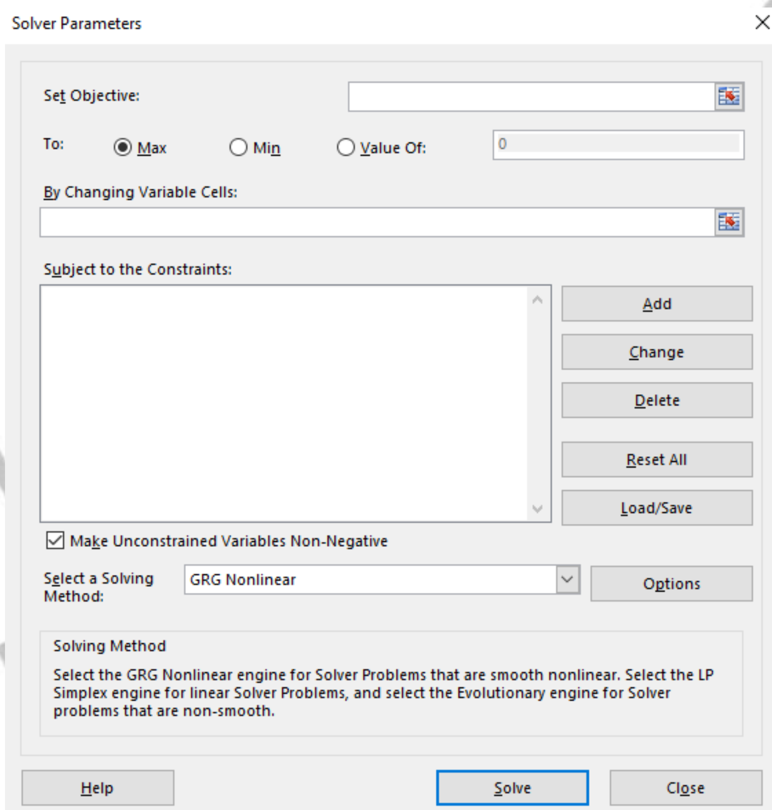
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2			Lavadoras	Estufas	Refrigeradores							
3		Costo de pedido	12000	10000	18000							
4		Costo de adquirir	3000	4000	8000							
5		Costo anual de mantenimiento/unidad	300	320	640							
6		Demanda anual	2400	1800	3000							
7		Espacio/unidad (m^2)	1.2	1.6	1.8							
8												
9												
10		Cantidad de Pedido	438.18	335.41	410.79							
11		Costo Total por artículo	131,453.41	107,331.26	262,906.83		Costo Total Conjunto	501,691.50				
12												
13		Espacio Total Ocupado	525.81	536.66	739.43		Espacio Total Conjunto	1,801.90		Espacio Disponible	1,400.00	
14												
15												

En este punto, es donde podemos utilizar Solver para resolver el problema.
Si no tiene habilitado este complemento, entonces siga los siguientes pasos:
File → Options → Add-ins → Go → Solver Add-in.
(En español, Archivo → Opciones → Complementos → Ir → Complemento Solver).

Ahora vaya al menú “Data” y en la parte superior derecha aparecerá Solver.

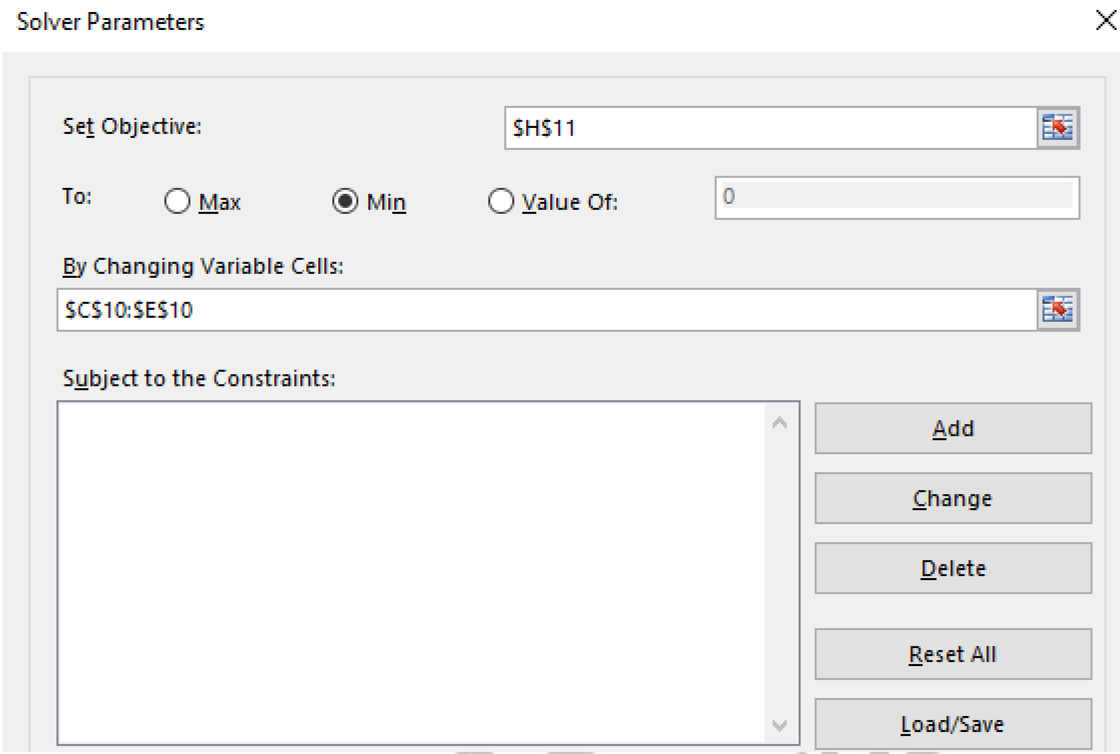


Da “click” en Solver y aparecerá el siguiente menú de diálogo:

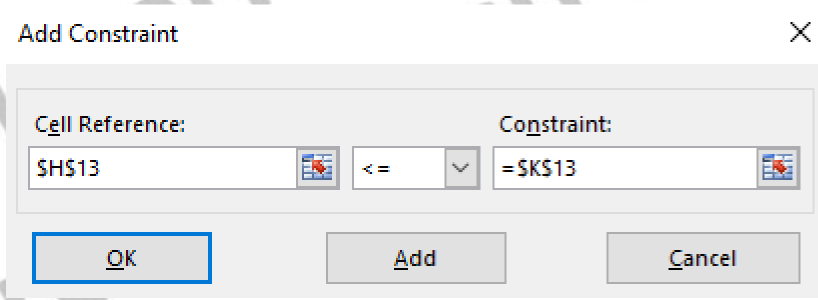


En la celda “Set Objective”, teclee: $H$11
En la opción “To” elija “Min”
En la celda “By Changing Variable Cells:” coloque “$C$10:$E$10”

Esto nos llevará a la siguiente figura:

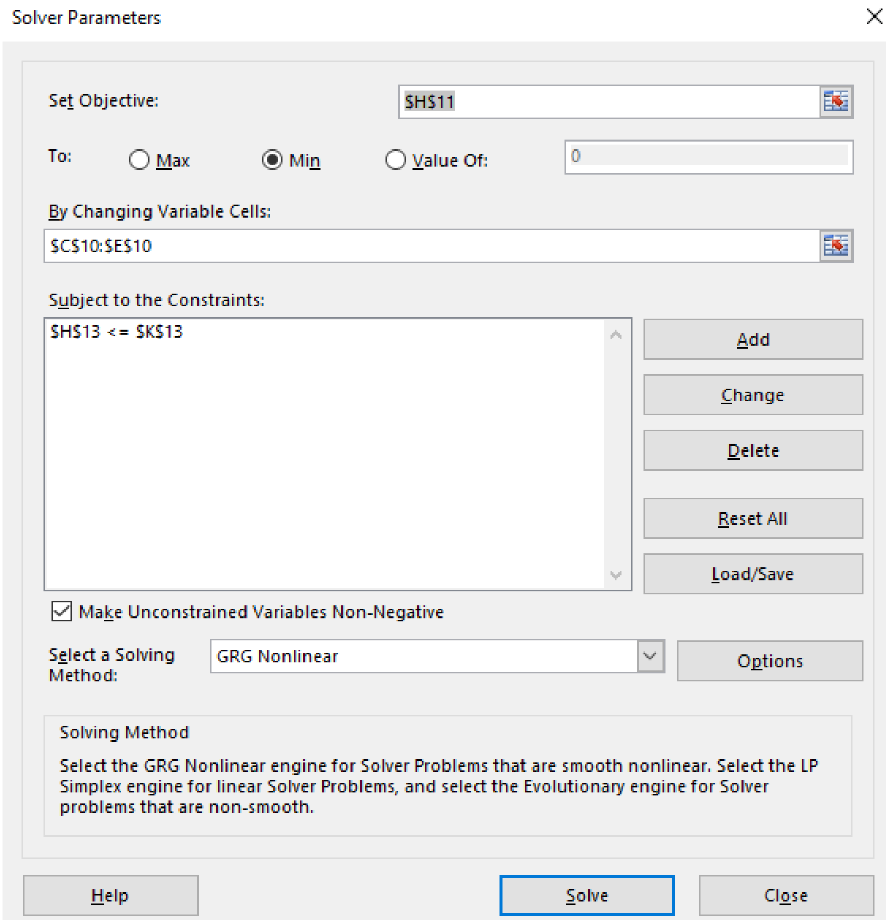


En la celda "Subject to the Constraints:" elija la opción Add, y esto generará un nuevo cuadro de diálogo:

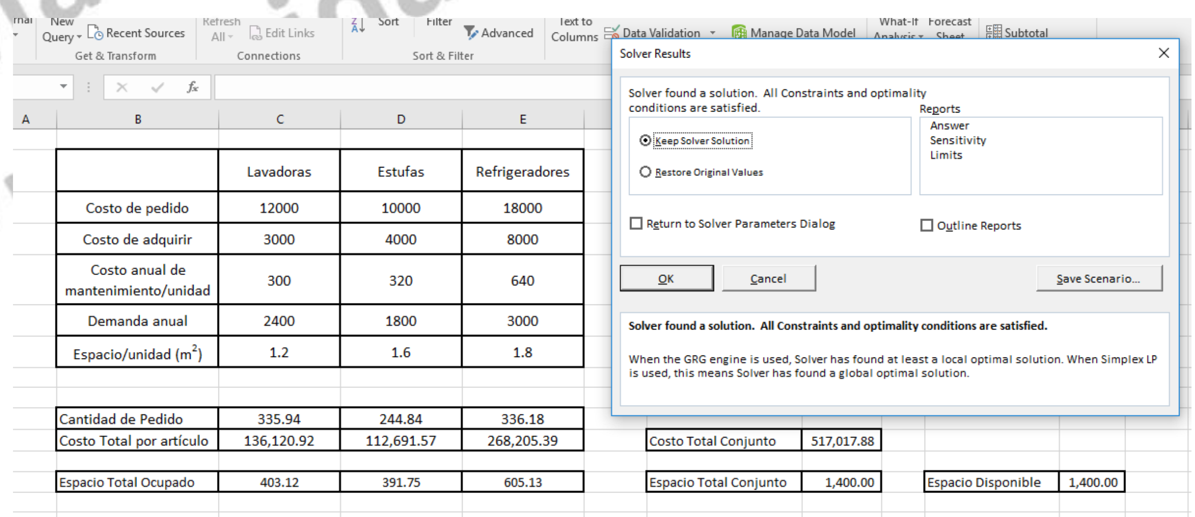


En Cell Reference coloque $H$13 y en Constraint coloque =$K$13, y da click en OK.

El cuadro de diálogo se cerrará y quedará la siguiente figura:



Ahora da click en Solve y entonces aparecerá un cuadro de diálogo como se muestra en la siguiente figura:



En esta última figura tú ya podrás observar los resultados. Las cantidades de pedido cambian a 335.94, 244.84, 336.18, y el Costo Total Conjunto ha cambiado a 517,017.88. Pero ahora, el Espacio Total Conjunto se ha restringido al espacio disponible.

Además, como puede observar, estos resultados son congruentes con el resultado del Ejemplo 4.5.