

## Ejercicios Resueltos 2 Análisis de Sensibilidad

### PROBLEMA 1

Una empresa se especializa en la producción de tres diferentes tipos de muebles: mesas, sillas y sillones individuales. Los requerimientos (en horas de trabajo) en los departamentos de carpintería, tapicería y pintura, así como también el número de horas de trabajo disponibles mensualmente en cada departamento son los siguientes:

	Carpintería	Tapicería	Pintura
Mesas	3 hrs	0 hrs.	3 hrs.
Sillas	2 hrs	1 hr.	1 hr.
Sillón individual	2 hrs.	3 hrs.	0 hrs.
Disponibilidad de Horas de trabajo	1000	500	800

El departamento de mercadotecnia de la empresa ha recibido la siguiente información de mercado. La venta de las mesas no puede sobrepasar las 100 unidades. El número de sillas no debe ser mayor que 500 unidades y el número de sillones no tiene restricción de demanda, es decir, podrían colocarse cuantos sillones pudieran producirse. Por otra parte, dado que muchos clientes que compran las mesas desean sillas, un requisito extra es que el número de sillas que se fabriquen deben de ser al menos el doble que el número de mesas.

Las utilidades de cada uno de estos muebles son \$24, \$9 y \$30.

El modelo que el ingeniero ha planteado, es el siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = 24 x_1 + 9 x_2 + 30 x_3$$

Sujeto a

$$3 x_1 + 2 x_2 + 2 x_3 \leq 1000$$

$$x_2 + 3 x_3 \leq 500$$

$$3 x_1 + x_2 \leq 800$$

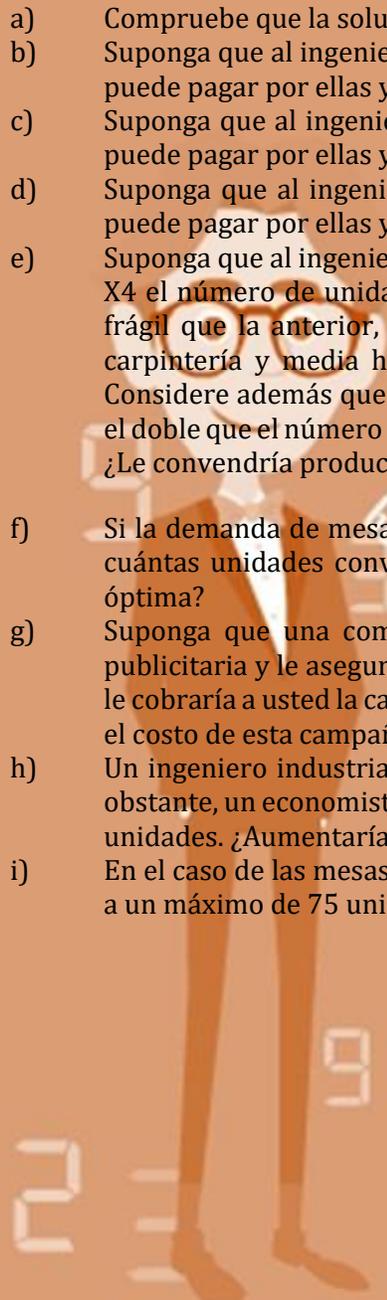
$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 500$$

$$2 x_1 - x_2 \leq 0$$

Con este planteamiento, el ingeniero ha concluido que lo recomendable es producir 100 mesas, 200 sillas y 100 sillones. Las variables básicas para el problema son:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $h_1$ ,  $h_3$  y  $h_5$ . Además, la matriz inversa asociada a la base es:

0	0	0	1	0	0
0	0	0	2	0	-1
0	1/3	0	-2/3	0	1/3
1	-2/3	0	-17/3	0	4/3
0	0	1	-5	0	1
0	0	0	-2	1	1

- 
- a) Compruebe que la solución es óptima
- b) Suponga que al ingeniero le pueden vender horas de carpintería en un taller cercano, cuánto puede pagar por ellas y cuantas debería de comprar
- c) Suponga que al ingeniero le pueden vender horas de tapicería en un taller cercano, cuanto puede pagar por ellas y cuantas debería de comprar
- d) Suponga que al ingeniero le pueden vender horas de pintura en un taller cercano, cuanto puede pagar por ellas y cuantas debería de comprar
- e) Suponga que al ingeniero le han propuesto un diseño alternativo de sillas (definiremos como X4 el número de unidades a producir de este nuevo tipo de silla). Esta silla es mucho más frágil que la anterior, por lo que solo requiere una hora y media en el departamento de carpintería y media hora en pintura, pero su utilidad es únicamente de \$2 por unidad. Considere además que debe seguir cumpliéndose que el número de sillas debe ser al menos el doble que el número de mesas y que el número de sillas no debe ser mayor de 500 unidades. ¿Le convendría producir este tipo de sillas?
- f) Si la demanda de mesas pudiese aumentarse mediante alguna campaña publicitaria, ¿hasta cuántas unidades convendría aumentar este número para que la solución siguiese siendo óptima?
- g) Suponga que una compañía publicitaria le sugiere a la compañía realizar una campaña publicitaria y le asegura que la demanda de mesas aumentará a 150 unidades. La compañía le cobraría a usted la cantidad de \$300.00 por esta campaña. ¿Estaría usted dispuesto a pagar el costo de esta campaña?
- h) Un ingeniero industrial le sugiere a usted que aumente el precio de sus sillas en \$3.00, no obstante, un economista le asegura que, si hace esto, la demanda máxima de sillas será de 250 unidades. ¿Aumentaría usted el precio de las sillas?
- i) En el caso de las mesas, un aumento de \$4.00 en el precio de las mesas reduciría la demanda a un máximo de 75 unidades, ¿aumentaría usted el precio de las mesas?

Solución

	$c_B B^{-1} A - c$	$c_B B^{-1} b^t$
	$B^{-1} A$	$B^{-1} b^t$

a) Encuentre el cuadro final

	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	RHS
Z	1	0	0	0	0	10	0	22	0	1	7200
$x_1$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100
$x_2$	0	0	1	0	0	0	0	2	0	-1	200
$x_3$	0	0	0	1	0	1/3	0	-2/3	0	1/3	100
$h_1$	0	0	0	0	1	-2/3	0	-17/3	0	4/3	100
$h_3$	0	0	0	0	0	0	1	-5	0	1	300
$h_5$	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	1	300

b)

Dado que  $h_1 = 100$ , entonces le sobran 100 horas de carpintería, por lo que: **no debería comprar horas de carpintería, o bien, no debería pagar nada por ellas.**

Esto también puede ser comprobado mediante el precio sombra.

Añadimos una unidad al primer recurso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este resultado debe ser multiplicado por  $C_B$

$$(24 \quad 9 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, el precio sombra es cero. O lo que es lo mismo, no debería pagar nada por una unidad extra de este recurso.

c) No tenemos un exceso de horas de tapicería, por lo tanto, debemos obtener su precio sombra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(24 \quad 9 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$$

Puede pagar hasta \$10 por cada una de ellas. Para saber cuántas unidades debería comprar se realiza el siguiente procedimiento.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ R2 \\ 800 \\ 100 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 1/3 R2 - 200/3 \\ 1000 - 2/3 R2 - 1700/3 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Como estos resultados deben ser mayores o iguales que cero, entonces

$$1/3 R2 - 200/3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad R2 \geq 200$$

$$1000/3 - 2/3 R2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad R2 \leq 650$$

Dado que ya tenemos 500 horas de tapicería, para llegar a 650 horas, debemos comprar únicamente 150 horas a un precio máximo de \$10

d) Tenemos un exceso de horas de pintura (ya que  $h_3 = 300$ )

Por lo tanto, su precio sombra es cero, es decir, no debemos pagar nada por ellas.

e) En este caso, debemos formular las restricciones considerando esta nueva variable.

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3/2x_4 \leq 1000$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$3x_1 + x_2 + 1/2x_4 \leq 800$$

$$x_1 \leq 100$$

$$x_2 + x_4 \leq 500$$

$$2x_1 - x_2 - x_4 \leq 0$$

Ahora debemos incorporar los coeficientes de  $X_4$  a la matriz. Para esto, solo debemos realizar el siguiente procedimiento:  $B^{-1}X_4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/6 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos este resultado por  $C_B$ , para obtener su coeficiente en el renglón de la función objetivo.

$$(24 \quad 9 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/6 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -1 - 2 = -3$$

Como este coeficiente es menor que cero, entonces si conviene introducir este nuevo tipo de sillas a la producción.

f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 800 \\ R_4 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_4 \\ 2 R_4 \\ (500 - 2R_4)/3 \\ (2000 - 17R_4)/3 \\ 800 - 5 R_4 \\ -2 R_4 + 500 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \geq 0$$

$$2 R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \geq 0$$

$$500 - 2 R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \leq 250$$

$$2000 - 17 R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \leq 2000/17 = 117.647$$

$$800 - 5 R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \leq 160$$

$$500 - 2 R_4 \geq 0 \rightarrow R_4 \leq 250$$

Para que la solución no se modifique, la demanda de sillas solo podría aumentar 17.647 unidades.

g) El precio sombra del recurso 4 es \$22. Esto lo podemos obtener de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2/3 \\ -17/3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(24 \quad 9 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2/3 \\ -17/3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = 24 + 18 - 20 = 22$$

Dado que este precio sombra se mantendrá por 17.647 unidades, entonces estamos seguros de aumentar nuestra utilidad al menos  $22(17.647) = 388.23$ , esto significa que, aunque no aprovechemos el resultado de toda la campaña, deberíamos contratar esta campaña, pues al menos tendremos una ganancia de \$88.23

h) Dado que la demanda actual de sillas es de 500, pero que la empresa únicamente está produciendo 200 sillas, a la empresa no le importaría que la demanda bajase a 250 sillas. Por lo que debería aumentar el precio.

j) En el caso de las mesas, un aumento de \$4.00 en el precio de las mesas reduciría la demanda a un máximo de 75 unidades, ¿aumentaría usted el precio de las mesas?

Haremos los cálculos con una demanda máxima de 75 mesas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 0 & -17/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 800 \\ 75 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 150 \\ 350/3 \\ 725/3 \\ 425 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Con esto obtendremos la siguiente utilidad:

$$Z = 75*(28) + 150*(9) + 30*(350/3) = 6950$$

Como esta utilidad es menor que los \$7200 originales, entonces no conviene aumentar el precio de las mesas