CAPÍTULO 8

MODELOS FORMALES DE INVENTARIOS ESTOCÁSTICOS CON DEMANDA CONSTANTE

Cuando existe incertidumbre
alguien podría tomar una buena decisión y perder,
o tomar una mala decisión y tener ganancias…
pero tomar la decisión correcta de manera frecuente
es lo que hace la diferencia
entre el éxito o el fracaso.

En el capítulo 5 se presentó un heurístico que podría ser sumamente útil para abordar este tipo de problemas. Además de este heurístico, también existen modelos formales que pueden nos permiten obtener el óptimo para esta clase de problemas. Este capítulo tiene por objetivo presentar este tipo de modelos.

Regularmente, este tipo de modelos también son conocidos como modelos de revisión continua. El nombre de este tipo de modelos proviene de la idea de que los inventarios son monitoreados de forma permanente (o continua) y que cuando éste llega a alcanzar un determinado nivel (el punto de reorden), entonces se hace un requerimiento para solicitar una nueva remesa.

Una gran desventaja de los modelos formales es que están apegados a ciertos supuestos que limitan su aplicación en una gran mayoría de los casos.

Los supuestos del modelo son los siguientes:

1. La demanda es constante en el tiempo (aunque su comportamiento es estocástico).
2. El tiempo de adelanto es constante y conocido (τ) y la demanda durante el tiempo de adelanto puede ser modelada mediante una función de distribución de probabilidad $f(\mathrm{x})$.
3. La demanda es asumida como el valor esperado de la función de demanda.
4. No existen pedidos pendientes al momento de colocar una nueva orden (es decir, el tiempo de reposición es menor al ciclo del inventario).
5. El costo por unidad faltante es independiente del tiempo.

Antes de iniciar con la formulación de los modelos, sería conveniente entender el número esperado de unidades faltantes por periodo.

8.1 El concepto de unidades faltantes por periodo

Considerar una demanda estocástica, aun y cuando tengamos un inventario de seguridad, regularmente implica hablar también sobre unidades faltantes.

Por ejemplo, si la demanda semanal promedio es de 200 unidades y la desviación estándar es de 40 unidades, entonces nosotros podemos tener un stock de seguridad de 50 unidades y de cualquier forma, la probabilidad de tener faltantes aun será alta (10.6%). Obviamente, la mayoría de los periodos no se tendrán faltantes, sin embargo, existirán periodos en los cuales se tendrá desabasto.

Tratando de simplificar esta formulación imagine que usted ha decidido realizar pedidos cuando se tengan 7 unidades en inventario (en este caso, 7 unidades representa su punto de reorden), que su proveedor tarda una semana en entregar y que la demanda semanal está uniformemente distribuida entre 1 y 10 unidades. Esto es:

$$\mathrm{P(D=1)=P(D=2)=P(D=3)=,\ldots,=P(D=9)=P(D=10)=1/10}$$

Resulta obvio que no todas las semanas existirán faltantes, de hecho, solamente podrían ocurrir faltantes durante su tiempo de reabastecimiento, e incluso en esas semanas solamente existirán faltantes si la demanda de ese artículo es superior a 7 unidades.

Además, en el caso de que la demanda sea de 8 unidades, entonces el número de faltantes será 1; en el caso de que la demanda sea de 9 unidades se tendrán 2 unidades faltantes; y en el caso de que la demanda sea de 10 unidades se tendrán 3 unidades faltantes.

Dado que $\mathrm{P(D = 8) = P(D = 9) = P(D = 10)} = 1/10$; entonces el número esperado de faltantes en cada ciclo del inventario será: 1 (1/10) + 2 (1/10) + 3 (1/10) = 0.6 unidades.

Reescribiendo el número esperado de faltantes, podemos afirmar que:

$$\bar{b} = (8-7)P(D=8) + (9-7)P(D=9) + (10-7)P(D=10) = \sum_{D=r}^{10}(D-r)P(D)$$

Note que en la expresión final, en el caso de que D = 7, ese término será 0, por lo que podemos iniciar la sumatoria cuando $D = r$.

Como es lógico suponer, el número de unidades faltantes depende en gran medida del punto de reorden r. Así, el número esperado de unidades agotadas por ciclo de inventario será una función que depende del punto de reorden, por lo que se denotará como $\bar{b}(r)$.

Además, para el caso continuo, en lugar de utilizar el símbolo de sumatoria, deberíamos considerar utilizar el símbolo de integral, por lo que una fórmula para representar el número de unidades faltantes en un ciclo de inventario es:

$$\bar{b}(r) = \int_r^\infty (D-r)f(D)dD$$

Ejemplo 8.1.

Suponga un establecimiento cuyo proveedor tiene un tiempo de adelanto τ = 1 semana, suponga además que la demanda durante el tiempo de adelanto puede ser representada mediante una distribución uniforme con parámetros (100, 300). Es decir, la demanda semanal es una cantidad que puede variar entre 100 unidades y 300 unidades con igual probabilidad de ocurrencia. Suponga finalmente que este establecimiento ha definido su punto de reorden en 250 unidades, esto es, la empresa hace un pedido cuando existen 250 unidades en inventario. Determine:

a) El tamaño del stock de seguridad que está implementando esta empresa.
b) La probabilidad de que se presenten faltantes durante el tiempo de adelanto.
c) El número promedio de unidades faltantes por ciclo.

Solución.-

a) Dado que la demanda promedio durante el tiempo de adelanto es de 200 unidades y el punto de reorden es de 250 unidades, entonces la empresa ha considerado un tamaño de stock de seguridad de 50 unidades (es decir, $SS = r - \mu$)

b) Dado que la demanda podría llegar a ser hasta de 300 unidades, entonces existe la posibilidad de que puedan ocurrir faltantes. Por otra parte, dado que la función de demanda durante el tiempo de adelanto es $U(100, 300)$, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{200} & si \quad 100 < x < 300 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ocurran faltantes puede representarse como:

$$P(x > 250) = \int_{250}^{\infty} f(x)dx = \int_{250}^{300} \frac{1}{200} dx = 0.25$$

c) El número esperado de unidades faltantes puede representarse mediante la expresión:

$$\bar{b}(r) = \int_{r}^{\infty} (x - r)f(x)dx$$

En este caso,

$$\bar{b}(r) = \int_{250}^{300} (D - 250)\frac{1}{200} dD = 6.25$$

Es decir, el número promedio de unidades agotadas por cada ciclo del inventario será de 6.25 unidades.

8.2 El modelo de inventario con pedidos retroactivos

Como se había comentado en el capítulo 5, los modelos de inventarios estocásticos siempre deben considerar al menos los costos de pedidos, los costos de mantenimiento de inventario y los costos de faltantes.

Si consideramos N pedidos al año y que la realización de cada pedido tiene un costo A, si consideramos que el costo de mantenimiento de inventario es h y que el castigo económico por unidad faltante es π. Entonces

$$K(Q,r) = AN + h\bar{I} + \pi\, \bar{b}(r)N = A\frac{\bar{D}}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + SS\right) + \pi\, \bar{b}(r)\frac{\bar{D}}{Q}$$

Una nota importante es que, en todos los casos, estamos hablando de valores esperados, por lo que en realidad la notación debería de ser $E[K(Q,r)]$, pero por simplicidad, dejaremos la notación de este modelo en $K(Q,r)$.

Esto es,

$$K(Q,r) = A\frac{\bar{D}}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu\right) + \pi\, \bar{b}(r)\frac{\bar{D}}{Q}$$

Derivando respecto a Q se obtiene

$$\frac{\partial K(Q,r)}{\partial Q} = -A\frac{\bar{D}}{Q^2} + \frac{h}{2} - \pi\bar{b}(r)\frac{\bar{D}}{Q^2} = 0 \qquad (1)$$

Antes de obtener la derivada parcial con respecto a *r*, primero note que

$$\frac{\partial \bar{b}(r)}{\partial r} = \frac{\partial\left(\int_r^\infty (x-r)f(x)dx\right)}{\partial r} = \int_r^\infty (-1)f(x)dx = (-1)[1 - F(r)] = F(r) - 1,$$

donde $F(x)$ representa la función de probabilidad acumulada de $f(x)$.

Derivando respecto a *r* se obtiene,

$$\frac{\partial E[K(Q,r)]}{\partial r} = h + \frac{\pi\, \bar{D}}{Q}[F(r) - 1] = 0 \qquad (2)$$

Despejando a Q de la ecuación 1 y despejando a r de la ecuación 2, entonces se obtiene que:

$$Q = \sqrt{\frac{2\bar{D}\left[A + \pi\bar{b}(r)\right]}{h}} \qquad (3)$$

y

$$F(r) = \frac{\pi D - hQ}{\pi D} \qquad (4)$$

Note que en la ecuación (3) el valor de Q depende de r, mientras que en la ecuación (4) la expresión $F(r)$ depende de Q.

En este caso, para encontrar la pareja óptima de valores Q^* y r^* es necesario utilizar un procedimiento iterativo:

1. Suponga que $\bar{b}(r)$ = 0 y calcule el valor de Q utilizando la ecuación 3.
2. Con el valor de Q obtenido en el paso anterior, calcule el valor de r utilizando la ecuación 4.
3. Utilice nuevamente la ecuación 3 para calcular el valor de Q.
4. Repita los pasos 2 y 3 hasta que los valores de Q y r converjan.

Ejemplo 8.2

Una tienda que se dedica a la venta de artículos para oficinas cuenta con un modelo especial de sillas para escritorios. La demanda semanal de estas sillas presenta una demanda uniforme entre 20 y 60 sillas (considere 50 semanas al año). El costo de realizar un pedido se ha calculado en $3 000 y el tiempo de entrega de su proveedor es una semana. El costo de adquirir es de $300 por unidad y el precio de venta es de $420, el costo de mantenimiento de inventario se ha calculado en un 20% del valor de compra. Si las sillas se agotan, los clientes regularmente esperan a que la tienda reciba una nueva remesa, a cambio de esta fidelidad de los clientes, la tienda les ofrece un 10% de descuento sobre el precio de venta.

a) Determine Q^* y r^*
b) Determine el tamaño del stock de seguridad y el Nivel de Servicio.
c) Si se desea que exista tan sólo un 10% de probabilidad de que se presente desabasto en un ciclo del inventario, ¿cuál será la cantidad óptima de pedido? Y ¿cuál será el nivel de servicio?
d) Suponga que el proveedor le ha prometido a esta tienda un descuento del 3% en el valor del producto si la cantidad de pedido es de 1000 unidades. ¿Vale la pena tomar este descuento?, de ser así, ¿cuáles serían los valores de Q^* y r^*?

Solución

a) Note que la demanda anual esperada es el promedio de la demanda semanal por el número de semanas, esto es, $\bar{D} = 40(50) = 2000$. Por otra parte, $\pi = (0.1)V = 42$.

   Empezamos nuestras iteraciones suponiendo que $\bar{b}(r) = 0$ y encontrando el valor de Q en la ecuación 3.

Por lo tanto

$$Q = \sqrt{\frac{2D[A + \pi\bar{b}(r)]}{h}} = \sqrt{\frac{2(2000)[3000 + 0]}{60}} \approx 447.21$$

Ahora, utilizando este resultado calculamos r. utilizando la ecuación 4:

$$F(r) = \frac{\pi D - hQ}{\pi D} = \frac{42(2000) - 60(447.21)}{42(2000)} = 0.6806$$

Por lo tanto, $r = 20 + 0.6806$ (60 – 20) ≈ 47.22, y por lo tanto

$$\bar{b}(r) = \int_{47.22}^{60} (D - 47.22) \frac{1}{40} dD \approx 2.041$$

Con este valor nuevamente calculamos Q en la ecuación 3.

$$Q = \sqrt{\frac{2D[A + \pi\bar{b}(r)]}{h}} = \sqrt{\frac{2(2000)[3000 + 42(2.041)]}{60}} \approx 453.56$$

Y nuevamente calculamos r.

$$F(r) = \frac{\pi D - hQ}{\pi D} = \frac{42(2000) - 60(453.56)}{42(2000)} = 0.6760$$

Por lo tanto, r ≈ 47.04, y por lo tanto $\bar{b}(r)$ ≈ 2.099.

Repitiendo este procedimiento se obtiene que Q ≈ 454 y r ≈ 47 e iterando nuevamente ya se obtiene los mismos resultados, por lo que Q^* ≈ 454 y r^* ≈ 47.

b) Dado que r^* ≈ 47 y que el promedio de consumo es μ = 40 unidades. Entonces, el stock de seguridad será $SS = r - \mu$ = 7 unidades.

Por otra parte, debe considerar que, por cada pedido de 454 unidades, usted tendrá en promedio 2.099 unidades faltantes, por lo

$$NS = \frac{454}{454 + 2.099} = 0.9953$$

Es decir, se tendrá un nivel de servicio del 99.53%

c) Si se desea que tan solo exista un 10% de probabilidad de desabasto en un ciclo de inventario, entonces debe considerar que $F(r) = 0.90$. Esto implica que r = 56, y $\bar{b}(r)$ ≈ 0.2.

   Por lo que Q ≈ 448. Por otra parte, solo se tendrán 0.2 unidades agotadas por cada 448 unidades que se tendrán disponibles para la venta, es decir, el Nivel de Servicio será igual a $NS = 448.2/448 = 99.95\%$

d) Dado que este es un problema con descuentos, entonces debemos anexar a la función de costo total el costo de adquisición.

   Con los valores óptimos calculados en a) se obtiene que $E[K(Q, r)]$ = 627,644.55 (considerando el costo de adquisición).

   Considerando ahora la oferta realizada por el proveedor, entonces la cantidad de pedido será de 1000 unidades (Q = 1000), por lo que r ≈ 31.

   Con estos valores y con un valor de C = 291 se obtiene que $E[K(Q, r)]$ = 618,317.14

Un problema que se presenta frecuentemente es que la demanda tenga una distribución normal, cuando esto sucede el cálculo de $\bar{b}(r)$ puede ser sumamente complicado, pero al igual que lo realizado en el capítulo 5, podemos calcular este valor con el anexo que se presenta en ese capítulo.

8.3 El modelo de inventario con ventas perdidas

En el caso de que los faltantes se conviertan en ventas perdidas, el modelo tiene una pequeña variación.

En el caso de pedidos retroactivos, entonces el inventario podría "tomar valores negativos", es decir, supongamos que al final del ciclo de inventario usted tiene 5 unidades faltantes, entonces cuando lleguen las Q unidades que usted solicitó a su proveedor en su cantidad de pedido, usted inmediatamente descontará las cinco unidades faltantes y tendrá un inventario inicial de $Q - 5$ unidades en inventario; en el modelo de ventas perdidas, esto no ocurre, ya que aunque usted haya tenido 5 unidades faltantes, usted no descontará este faltante a su inventario inicial, por lo que su inventario inicial será de Q unidades.

Esto en el largo plazo significa que su inventario promedio en este modelo será un poco más grande que en el modelo anterior.

Afortunadamente, la diferencia entre los tamaños del inventario promedio en ambos modelos solo difieren en el número de faltantes por ciclo, y dado que el número promedio de faltantes por ciclo es $\bar{b}(r)$, entonces el inventario promedio por ciclo de un modelo con ventas perdidas será $\bar{I} = \frac{Q}{2} + SS + \bar{b}(r)$.

Por lo tanto, en un modelo con ventas perdidas,

$$K(Q,r) = A\frac{\bar{D}}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu + \bar{b}(r)\right) + \pi\,\bar{b}(r)\frac{\bar{D}}{Q}$$

Obteniendo los óptimos para este modelo, entonces se obtiene que:

$$Q = \sqrt{\frac{2\bar{D}\left[A + \pi\bar{b}(r)\right]}{h}} \qquad (5)$$

y

$$F(r) = \frac{\pi D}{\pi D + hQ} \qquad (6)$$

Se propone al lector realizar la deducción de estas fórmulas como un ejercicio.

Al igual que en el modelo anterior, en la ecuación (5) el valor de Q depende de r, mientras que en la ecuación (6) la expresión $F(r)$ depende de Q. Por lo que será necesario utilizar un procedimiento iterativo con los siguientes pasos:

1. Suponga que $\bar{b}(r)$ = 0 y calcule el valor de Q utilizando la ecuación 5.
2. Con el valor de Q obtenido en el paso anterior, calcule el valor de r utilizando la ecuación 4.
3. Utilice nuevamente la ecuación 5 para calcular el valor de Q.
4. Repita los pasos 2 y 3 hasta que los valores de Q y r converjan.

Ejemplo 8.3

El principal producto de una veterinaria es el alimento para perros. Los registros de ventas muestran que la demanda semanal de este producto se puede representar como una distribución uniforme *U(50, 300)*. El precio de compra es de \$45/kg mientras que la veterinaria lo vende en \$65/kg, la veterinaria supone que el desabasto se traduce en ventas perdidas. El costo de realizar un pedido se ha calculado en \$300, mientras que el costo de mantener un kg de este producto en inventario durante un año lo ha calculado como un 20% del valor de compra. El tiempo de entrega del proveedor es de una semana. Suponga 50 semanas al año,

a) Determine Q * y r *
b) Determine el tamaño del stock de seguridad
c) Si se desea que exista tan sólo un 10% de probabilidad de que se presente desabasto en un ciclo del inventario, ¿cuál será la cantidad óptima de pedido?, ¿cuál será el nivel de servicio?
d) Obtenga la diferencia en términos de dinero de la utilización del modelo heurístico estudiado en el capítulo 5 versus la solución óptima obtenida en este ejercicio.

Solución

a) Note que la demanda anual esperada es el promedio de la demanda semanal por el número de semanas, es decir, $\overline{D} = 175(50) = 8750$. Por otra parte, en este caso el castigo económico por faltante puede expresarse como $\pi = V - C = 20$.

   Ahora iniciamos la aplicación del modelo utilizando la ecuación 5 y suponiendo $\overline{b}(r) = 0$.

$$Q = \sqrt{\frac{2\overline{D}[A + \pi\overline{b}(r)]}{h}} = \sqrt{\frac{2(8750)[300 + 0]}{9}} \approx 763.76$$

   Ahora, utilizando este resultado calculamos r. utilizando la ecuación 6:

$$F(r) = \frac{\pi\overline{D}}{hQ + \pi\overline{D}} = \frac{20(8750)}{9(763.76) + 20(8750)} = 0.9622$$

   Por lo tanto, $r \approx 290.55$, y por lo tanto $\overline{b}(r) \approx 0.179$.

   Con este valor nuevamente calculamos Q.

$$Q = \sqrt{\frac{2\overline{D}[A + \pi\overline{b}(r)]}{h}} = \sqrt{\frac{2(8750)[300 + 20(0.179)]}{9}} \approx 768.31$$

Y nuevamente calculamos r.

$$F(r) = \frac{\pi \overline{D}}{hQ + \pi \overline{D}} = \frac{20(8750)}{9(768.31) + 20(8750)} = 0.9620$$

Por lo tanto, $r \approx 290.50$, y por lo tanto $\bar{b}(r) \approx 0.1806$.

Repitiendo este procedimiento se obtiene que $Q \approx 769$ y $r \approx 290$ e iterando nuevamente se obtienen los mismos resultados, por lo que $Q \approx 769$ y $r \approx 290$.

b) Dado que $r^* \approx 290$ y que el promedio de consumo es $\mu = 175$ unidades. Entonces, el stock de seguridad será $SS = r - \mu = 115$ unidades.

c) Si se desea un nivel de servicio del 90%, esto equivale a decir que $F(r) = 0.90$. Esto implica que $r = 275$, y $\bar{b}(r) \approx 1.25$. Por lo que $Q \approx 795$.

Por otra parte,

$$NS = \frac{795}{795 + 1.25} = 0.9984$$

Es decir, tendremos un nivel de servicio del 99.84%

d) Con los valores óptimos calculados en a) se obtiene que $K(769, 291) = 7{,}956.35$

Por otra parte, consideremos el método heurístico estudiado en el capítulo 5.

En ese caso,

$$Q = \sqrt{\frac{2A\overline{D}}{h}} \approx 764$$

Por lo que

$$t = \frac{Q}{\overline{D}} = \frac{764}{8750} = 0.0873$$

Calculando

$$F(r) = \frac{\pi}{\pi + ht} = \frac{20}{20 + 9(0.0873)} = 0.9622$$

Dado que la distribución de demanda es uniforme, entonces

$$r = 50 + 0.9622(250) \approx 291$$

Con estos valores ($Q = 764, r = 291$) entonces $K(764, 291)$ = 7,956.43

Es decir, la diferencia entre el costo total sugerido por el método heurístico y el modelo formal es equivalente en porcentaje al 0.001%.