CAPÍTULO 7

MODELOS DE PERIODO ÚNICO

Cuando existe incertidumbre
alguien podría tomar una buena decisión y fracasar,
o tomar una mala decisión y tener éxito…
pero tomar la decisión correcta de manera frecuente
es lo que hace la diferencia
entre el éxito o el fracaso de una vida.

Una vez que se han estudiado los diferentes modelos determinísticos, entonces es conveniente estudiar los modelos estocásticos. En estos modelos se reconoce que no se puede tener una total certeza sobre la demanda pero que es posible suponer que el comportamiento de ésta puede modelarse mediante la asociación de una distribución de probabilidad.

Dentro de los modelos estocásticos, uno de los problemas más importantes es el modelo de periodo único. Este problema consiste en suponer que un artículo tiene un periodo de venta muy definido en el tiempo, el modelo es muy útil para establecer políticas de inventarios para artículos de temporada, bienes perecederos, refacciones, y mercancías de moda.

Dado que los artículos son ordenados antes de iniciar el periodo de venta se corre el riesgo tanto de caer en desabasto como en un exceso de abastecimiento.

8.1 El modelo del vendedor de periódicos

Los modelos de periodo único también son conocidos regularmente con el nombre de "El modelo del vendedor de periódicos". Los supuestos de este modelo son bastante simples:

1. El producto solamente puede ser ordenado al inicio del periodo y se intenta satisfacer la demanda de ese período. Si la demanda es mayor que la cantidad adquirida al inicio del periodo, regularmente se considera que no es posible adquirir una mayor cantidad del producto.
2. El producto se adquiere a un costo C por unidad; el precio de venta de cada artículo es V; si al final de periodo de venta quedasen artículos en inventario estos podrían venderse a un precio g (en el caso de que la persona tuviese que pagar por deshacerse de los artículos, g tendría un valor negativo).

Para ilustrar este concepto, suponga el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.1
Un vendedor de periódicos tiene que tomar cada día la decisión de cuántos periódicos adquirirá en un puesto establecido. Él adquiere los periódicos a un precio de \$7 y sabe que puede venderlos en un precio de \$11, sin embargo, si la cantidad que él adquiere se encuentra por debajo de la demanda, él sabe que no puede regresar al puesto de periódicos a adquirir una mayor cantidad de ellos.

Por otra parte, si la cantidad de periódicos que compra se encuentra por arriba de la demanda, entonces podrá regresar al estante donde los adquirió pero que sólo le devolverán \$2 por cada uno de ellos.

Finalmente, él sabe que la demanda de periódicos la puede modelar mediante la siguiente distribución de probabilidad:

D	15	16	17	18	19	20
P(D)	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1

Determine cuál es la cantidad de periódicos óptima que debe adquirir y la utilidad esperada de su decisión.

Solución.-
En este caso, parece bastante lógico suponer que el vendedor deberá adquirir entre 15 y 20 periódicos diariamente (ya que no tendría ningún sentido adquirir menos de 15 periódicos, como tampoco tendría sentido adquirir más de 20).

Dado que solamente se presentan seis opciones de solución una posibilidad es tratar de evaluar cada una de ellas. Para esto observe la siguiente tabla de utilidades:

TABLA 8.1

TABLA DE UTILIDADES PARA EL EJEMPLO 8.1

Cantidad Adquirida	Demanda Observada						Valor Esperado
	15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	
15	60	60	60	60	60	60	
16	55	64	64	64	64	64	
17	50	59	68	68	68	68	
18	45	54	63	72	72	72	
19	40	49	58	67	76	76	
20	35	44	53	62	71	80	
Probabilidad	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	

Los números dentro de la tabla representan la utilidad cuando demandan X unidades dado que las unidades que ese día se adquirieron fueron Y. Por ejemplo, si se adquieren 16 unidades y la demanda de ese día es 19 unidades, entonces el vendedor de periódicos podría vender únicamente las 16 que adquirió, por lo que la utilidad sería de $64.

Por otra parte, si el vendedor adquiere 19 periódicos y se demanda únicamente 16 unidades, entonces el vendedor ganaría $4 por cada unidad vendida (obtendría una ganancia de $64 por las 16 unidades vendidas) y perdería $5 por cada unidad que devuelve al expendio (perdería $15 por las 3 unidades devueltas) por lo que la utilidad sería de $49. Esta utilidad también podría calcularse de la siguiente forma, el vendedor compra 19 periódicos a un precio de $7 (invierte $133), 16 de estos periódicos los vende a un precio de $11 (ingresa $176) y el resto los vende a un precio de $2 (ingresa $6), por lo que la utilidad es: 11(16) + 2(3) – 11 (19) = 176 + 6 – 133 = 49.

Para resolver este problema, lo importante ahora es obtener la utilidad esperada de cada una de las opciones, para esto, la función de probabilidad resulta importante. Por ejemplo, si deseamos obtener la utilidad esperada del vendedor de periódicos cuando éste toma la decisión de adquirir 18 periódicos, entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{E[U(18)]} &= \mathrm{P(15)\ (45) + P(16)\ (54) + P(17)\ (63) + P(18)\ (72) + P(19)\ (72) + P(20)\ (72)} \\ &= 0.1\ (45) + 0.1\ (54) + 0.2\ (63) + 0.3\ (72) + 0.2\ (72) + 0.1\ (72) = 65.7 \end{aligned}$$

Evaluando de esta manera para cada una de las opciones se obtiene que: $\mathrm{E[U(15)]} = 60.00$, $\mathrm{E[U(16)]} = 63.10$, $\mathrm{E[U(17)]} = 65.30$, $\mathrm{E[U(18)]} = 65.70$, $\mathrm{E[U(19)]} = 63.40$, $\mathrm{E[U(20)]} = 59.30$.

Por lo que la opción óptima se encuentra en solicitar 18 periódicos diarios, lo cual nos ofrecerá una utilidad promedio de $65.70.

Sin restar importancia al resultado, algo que es conveniente subrayar es la forma en que la utilidad es calculada. Si se solicitan Q unidades, entonces la utilidad esperada de esa opción será:

$$E[U(Q)] = \sum_{D=0}^{Q} [VD + g(Q-D) - QC]P(D) + \sum_{D=Q+1}^{\infty} (QV - QC)\,P(D)$$

$$E[U(Q)] = \sum_{D=0}^{Q} [VD + g(Q-D)]P(D) + \sum_{D=Q+1}^{\infty} [QV]P(D) - QC$$

La primera sumatoria determina la utilidad esperada en el caso en que la demanda (D) sea menor que la cantidad de pedido (Q).

Dado que cuando ocurre esta condición toda la demanda podría ser satisfecha y por cada unidad que logra venderse se obtendrá un ingreso de V unidades monetarias, entonces se obtendría un ingreso VD de las unidades vendidas. Además las unidades restantes ($Q - D$) se venderían a un precio de recuperación g (de aquí se obtiene la expresión $g\ (Q - D)$). Esto se multiplicará por la probabilidad de que ocurra esa demanda ($P(D)$), y esto nos dará el ingreso esperado.

Por otra parte, si la demanda resulta mayor que la cantidad adquirida, entonces solamente se podrá ingresar QV unidades monetarias, ya que el resto de la demanda se transformará en venta perdida. Para obtener el ingreso esperado en esta parte también se multiplica por la probabilidad de que ocurran estas demandas.

Finalmente, dado que se adquieren Q unidades a un precio C, entonces el costo de adquisición puede representarse por la expresión QC. Por lo que la utilidad esperada será la diferencia entre la suma de los ingresos esperados y el costo.

El razonamiento expresado anteriormente es fundamental si deseamos contemplar el caso en que una función de probabilidad sea continua. En el caso continuo, la ecuación de la utilidad esperada puede ser reescrita como:

$$E[U(Q)] = \int_0^Q [VD + g(Q-D)]f(D)dD + \int_Q^\infty QVf(D)dD - QC$$

En este caso, es posible tratar de obtener la derivada para determinar el punto que optimiza el valor de esta función. Para esto, obtenemos la derivada de la función con respecto a Q. Utilizando el teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\frac{dE[U(Q)]}{dQ} = VQf(Q) + g\int_0^Q f(D)dD + gQf(Q) - gQf(Q) + V\int_Q^\infty f(D)dD - VQf(Q) - C$$

Reduciendo los términos semejantes la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{dE[U(Q)]}{dQ} = gF(Q) + V[1 - F(Q)] - C$$

donde $F(Q)$ representa el valor de la función de probabilidad acumulada hasta Q.

Igualando a cero y despejando $F(Q)$ se obtiene que:

$$F(Q^*) = \frac{V-C}{V-g}$$

Este resultado es sumamente importante, ya que esto representa que la cantidad óptima a ordenar sería:

$$Q^* = F^{-1}\left(\frac{V-C}{V-g}\right)$$

donde F^{-1} representa la función inversa de la distribución de probabilidad acumulada.

Ejemplo 8.2

Gaermont Modas está calculando el número óptimo de máscaras que debe ordenar para las fiestas de Halloween. Gaermont supone que la demanda de estas máscaras puede representarse mediante una distribución uniforme con parámetros 200 y 500 (esto es, es igual de probable vender 200 máscaras que 500 máscaras que un valor intermedio entre ellas).

Gaermont adquiere las máscaras a un costo de \$80 y las vende en \$150. Si al pasar el 31 de octubre sobran máscaras se podrán rematar a un precio de \$50.
Encuentre el número óptimo de máscaras a ordenar y la utilidad esperada.

Solución
Para este problema, los variables definidas anteriormente toman los siguientes valores:
$V = 150$, $C = 80$, $g = 50$.
Por lo que,

$$F(Q^*) = \frac{V-C}{V-g} = \frac{150-80}{150-50} = 0.7$$

Por lo tanto $Q^* = F^{-1}(0.7) = 410$.

Sustituyendo a Q en la ecuación:

$$E[U(Q)] = \int_0^Q [VD + g(Q-D)]f(D)dD + \int_Q^\infty QVf(D)dD - QC$$

se obtiene que

$$\int_{200}^{410} \frac{[150D + 50(410-D)]}{300} dD + \int_{410}^{500} \frac{410(150)}{300} dD - 410(80) = 21350$$

Por lo tanto, se deberían ordenar 410 unidades y la utilidad esperada es \$21350

Una observación importante en este caso, es que la formula obtenida para el caso continuo puede ser útil también para el caso discreto.

Por ejemplo, para el problema del vendedor de periódicos descrito anteriormente $F(Q^*) = 0.4444$ (considerando $V = 11$, $C = 7$ y $g = 2$).

De acuerdo a la tabla de probabilidades descrita para este problema

D	15	16	17	18	19	20
P(D)	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1
Prob. Acum.	0.1	0.2	0.4	0.7	0.9	1.0

Entonces deberíamos considerar lo siguiente:

Si $0.0 \leq F(Q^*) \leq 0.1$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 15 unidades.
Si $0.1 \leq F(Q^*) \leq 0.2$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 16 unidades.
Si $0.2 \leq F(Q^*) \leq 0.4$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 17 unidades.
Si $0.4 \leq F(Q^*) \leq 0.7$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 18 unidades.
Si $0.7 \leq F(Q^*) \leq 0.9$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 19 unidades.
Si $0.9 \leq F(Q^*) \leq 1.0$, entonces la cantidad óptima de pedido sería 20 unidades.
Dado que para este problema $0.4 \leq F(Q^*) \leq 0.7$, entonces $Q^* = 18$.

8.2 Algunas variantes al modelo del vendedor de periódicos

Una ventaja del modelo del vendedor de periódicos es que pueden ser introducidas ciertas variantes como en los modelos determinísticos anteriormente estudiados.

8.2.1 El modelo del vendedor de periódicos con descuentos por volumen

Una de las variantes consiste en suponer la posibilidad de que puedan recibirse descuentos por volumen. Si consideramos esta alternativa, entonces la forma en que debería evaluarse el beneficio de alcanzar un determinado descuento es semejante a la que se sigue en los modelos EOQ.

Determinar la cantidad de pedido óptima y evaluar en aquellos descuentos que se alcanzan por arriba de esa cantidad.

Ejemplo 8.3

"*Totalmente Gaermont*" es una cadena de tiendas departamentales. Gaermont está pensando en determinar la cantidad de bicicletas que deberá adquirir para su venta para el próximo 30 de abril (día del niño). Gaermont supone que la demanda de estos juguetes se distribuye uniformemente con parámetros 200, 1000. El precio de venta de cada bicicleta es de $800 y de no venderse en ese día, Gaermont las rematará a un precio de $300. El costo de adquisición depende de la cantidad de pedido solicitada. El proveedor le ha ofrecido la siguiente oferta de descuentos:

Q	Precio
0 – 249	$500
250 – 499	$480
500 – 750	$470
750 o más	$450

Determine la cantidad óptima de pedido

Solución.

Si consideramos el precio de $500, entonces $F(Q^*) = 0.60$ y la cantidad óptima de pedido es de 680 unidades. Dado que esta cantidad supera las 250 unidades, entonces debemos de intentar con el siguiente precio.

Si consideramos el precio de $480, entonces $F(Q^*) = 0.64$ y la cantidad óptima de pedido es 712 unidades. Dado que esta cantidad supera las 500 unidades nuevamente probamos con el siguiente descuento.

Si consideramos el precio de $470, entonces $F(Q^*) = 0.66$ y la cantidad óptima de pedido es 728 unidades. Dado que esta cantidad está en el intervalo, entonces probamos con este descuento. Con esta cantidad de pedido la utilidad esperada es $153 120.

Finalmente, si consideramos el precio de $450, entonces la cantidad óptima de pedido es 760 unidades. La utilidad esperada con Q = 760 es $168 000.

Por lo tanto la cantidad óptima de pedido es Q* = 760 unidades.

Consideremos un nuevo ejemplo

Ejemplo 8.4

"*Gaermont Camisería*" es un local establecido que se especializa en la venta de camisas de vestir. No obstante, también vende abrigos, trajes, corbatas y sweaters. Gaermont está tratando de calcular el número de sweaters que debe ordenar para la temporada de invierno. Gaermont supone que la demanda de este artículo se distribuye de manera normal con una media de 500 unidades y una desviación estándar de 100 durante la temporada de otoño invierno. El precio de venta de cada sweater es de \$400 y de no venderse al final del invierno se rematarán a un precio de \$100.

Por otra parte, el proveedor le ha ofrecido la siguiente oferta de descuentos:

Q	Precio
0 – 299	\$240
300 – 499	\$230
500 – 699	\$220
700 o más	\$200

Determine la cantidad óptima de pedido

Solución.

Si consideramos el costo unitario en \$240, entonces $F(Q^*) = 0.5333$. Esto equivale a una $Q = 508$ unidades. Dado que esta cantidad supera las 300 unidades e incluso las 500 unidades, entonces intentaremos con el costo que se encuentra en el tercer intervalo.

Si consideramos el precio de \$220, entonces $F(Q^*) = 0.6000$, lo que equivale significa que $Q = 525$ unidades. Dado que esta cantidad se encuentra entre las 500 y las 699 unidades, evaluamos ahora la función de utilidad y se obtiene que $E[U(525)] \approx 78\,410$.

Considerando el siguiente descuento ($C = 200$) se obtiene que $F(Q^*) = 0.6667$, lo que equivale significa que $Q = 543$ unidades. Dado que esta cantidad es menor que el rango mínimo permitido para este precio, entonces se evalúa $Q = 700$ unidades y se obtiene que $E[U(700)] \approx 79\,746$. Por lo que la cantidad óptima de pedido es de 700 unidades.

8.2.2 El modelo del vendedor de periódicos con múltiples productos y restricciones "suaves"

De manera similar a los modelos EOQ, una variación del problema es que puedan existir múltiples productos y que además existan restricciones (como el espacio disponible del almacén o la cantidad disponible de dinero a invertir) que deban de cumplirse. Al igual que los modelos EOQ, la manera de resolver este tipo de problemas es utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 8.5
Estamos a mediados de Enero y "*Dilo con Flores*" está considerando realizar un pedido para la compra de rosas, lirios, jazmines y nardos para tener disponibles a la venta este 14 de febrero. Por experiencia, Gaermont supone que las demandas de cada una de estas flores pueden describirse como una distribución normal con parámetros N(2000, 200), N(800, 150), N(500, 120) y N(600, 140) para rosas, lirios, jazmines y nardos, respectivamente.
El costo por cada flor, el precio de venta y el precio al que se rematará cada una de estas flores si llegan a sobrar se muestra en la siguiente tabla:

FLOR	Costo	Precio de venta	Precio de remate
Rosas	\$5	\$10	\$3
Lirios	\$8	\$14	\$5
Jazmines	\$11	\$15	\$4
Nardos	\$4	\$ 9	\$2

a) Determine la cantidad óptima de pedido de cada una de estas flores
b) Determine la cantidad óptima de pedido de cada una de estas flores si el presupuesto máximo permisible a invertir en la compra de estas flores es de \$22 000

Solución
a)

$$\mathrm{F}(Q_1) = \frac{10-5}{10-3} = 0.7143 \qquad \mathrm{F}(Q_2) = \frac{14-8}{14-5} = 0.6667$$

$$\mathrm{F}(Q_3) = \frac{15-11}{15-4} = 0.3636 \qquad \mathrm{F}(Q_4) = \frac{9-4}{9-2} = 0.7143$$

Por lo tanto, deberían adquirirse 2113 rosas, 864 lirios, 458 jazmines y 679 nardos.

b) Con las cantidades anteriores se tiene que el costo total sería de
C_T = 2113 (\$5) + 864 (\$8) + 458 (\$11) + 679 (\$4) = \$25 231

Si la cantidad máxima posible a invertir es de \$22 000, entonces se requiere resolver el siguiente problema:

Maximizar

$$E[U(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)] = \sum_{i=1}^{4} \int_0^{Q_i} [V_i D_i + g_i(Q_i - D_i)] f_i(D_i) dD_i + \sum_{i=1}^{4} \int_0^{Q_i} [V_i Q_i] f_i(D_i) dD_i - \sum_{i=1}^{4} Q_i C_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i C_i \leq 22000$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange para resolver la ecuación anterior se obtiene que

$$F(Q_i^*) = \frac{V_i - C_i - \lambda C_i}{V_i - g_i}$$

Utilizando λ = 0.3021 se obtiene que Q_1 = 1999, Q_2 = 761, Q_3 = 314 y Q_4 = 614. Con éstas cantidades se tiene que el costo total sería C_T = 21993.

8.2.3 El modelo del vendedor de periódicos con costo de pedidos

Un problema clásico considerado en el modelo del vendedor de periódicos consiste en encontrar el punto de reorden cuando existe un costo de pedido.

Suponga el caso cuando existe un costo por solicitar cualquier cantidad de unidades y se tiene una determinada cantidad de artículos en inventario. Si la cantidad que se tiene almacenada es cercana a la cantidad óptima de unidades que deberían tenerse al inicio de una temporada, entonces quizás sea más conveniente no solicitar unidades ya que éstas tendrán un costo extra al ser ordenadas.

Ejemplo 8.6

Cada cinco años el autor de "Felices Inventarios" renueva el contenido del texto y actualmente ya han pasado cuatro años desde la última edición. El costo de preparación para realizar una nueva corrida de producción es de $60 000, el costo unitario de impresión es de $180 y el precio de venta del libro es de $320.

Si al término del periodo de venta aún quedan ejemplares en existencia estas serán donadas a las bibliotecas de diferentes universidades (g = 0). Por otra parte, la demanda del libro para el presente año escolar se estima que está uniformemente distribuida con parámetros a = 4500 y b = 6500.

Solución.

Si dejamos de considerar el costo de preparación de la corrida de producción entonces el número óptimo de ejemplares que deberíamos tener para la venta al inicio del siguiente periodo escolar sería de 5375 unidades (considerando que $F(Q*)$ = 140/320 = 0.4375).

Si el día de hoy no se tuviese ningún ejemplar de este libro entonces lo correcto debería de ser realizar una corrida de producción de 5375 unidades de este texto y se obtendría una utilidad de $631 250 (considerando que el costo de preparación de la impresión sería de $60 000).

Si en este momento se tuviesen disponibles 375 unidades en inventario, entonces lo lógico sería hacer una corrida de producción de 5000 unidades (ya que si no se producen más ejemplares del texto se obtendría una utilidad de 375 ($320 – $180) = $52 500, mientras que si se envían a producir las 5000 unidades que nos falta para llegar a $Q*$ la utilidad esperada sería nuevamente los $631 250).

No obstante, si actualmente se tuviesen disponibles 5000 unidades en inventario, entonces lo lógico sería no realizar ninguna corrida de producción, ya que aun y cuando lográsemos vender todos los ejemplares únicamente se obtendría por ellos una utilidad de $52 500 pero a esta cantidad se le tendría que restar el gasto de preparación de la corrida de producción que es de $60 000, lo cual implicaría una mínima pérdida de $7 500.

La pregunta obvia consiste entonces en determinar cuál es el punto de reorden. Es decir, ¿a partir de qué cantidad debería de realizarse una corrida de producción?

Regularmente la determinación del punto de reorden puede obtenerse mediante los siguientes pasos:

1. Obtener Q^* mediante la fórmula
$$F(Q^*) = \frac{V-C}{V-g}$$

2. Obtener la utilidad esperada de Q^* considerando el costo de pedido o de preparación de la corrida de producción. Llamemos a T a esta cantidad, esto es,
$$T = \int_0^{Q^*} [VD + g(Q^* - D)]f(D)dD + \int_{Q^*}^{\infty} Q^* V f(D)dD - rQ^* - A$$

3. Conceptualmente hablando, el punto de reorden r es el mínimo valor que resuelve la siguiente ecuación:
$$\int_0^{r} [VD + g(r - D)]f(D)dD + \int_{r}^{\infty} rVf(D)dD - rC = T$$
Esto significa que si al resolver esta ecuación encontramos dos valores que cumplen con la igualdad, entonces r siempre será el menor de ellos.

Por ejemplo, para el problema del libro de texto se tiene que T = 631 250. Por lo tanto, resolviendo la integral propuesta en el paso 3 se obtiene que:

$$\int_{4500}^{r} [320D] \frac{1}{2000} dD + \int_{r}^{6500} 320r \frac{1}{2000} dD - 180r = 631250$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que $r \approx 4508$. Es decir, si tenemos un inventario inicial de 4508 unidades o menos, entonces debemos de realizar la corrida de producción. Si tenemos más de 4508 unidades entonces no deberíamos de realizar ninguna corrida.

Un consejo sumamente recomendable cuando se analiza una distribución de probabilidad con un límite inferior (por ejemplo, una distribución uniforme, una distribución triangular, etc.) es analizar la utilidad que se obtiene cuando tenemos en el inventario inicial el límite inferior de esta distribución.

Por ejemplo, en el caso del ejemplo del libro de texto se obtiene que el límite inferior de la distribución es 4500, dado que tenemos la certeza de que cualquier cantidad menor o igual a 4500 unidades se podrían vender, entonces la utilidad que se obtendría si existiesen 4500 unidades en inventario sería de M = 4500*($320 – $180) = $630 000. Si al calcular el valor de T se obtiene que T < M, entonces el punto de reorden puede ser obtenido de inmediato dividiendo el valor de T entre (V – C).

Por ejemplo, suponga que preparar una nueva corrida de impresión para el texto fuese de \$100,000. Entonces T = 591,250 < M. Entonces el punto de reorden puede ser calculado como r = 591,250/140 = 4223. Es decir, en el caso de tener una cantidad de libros menor o igual 4223 unidades entonces debería de realizarse una corrida de producción.

Observe el siguiente ejemplo

Ejemplo 8.7

Gaermont Línea Blanca está tratando de determinar el número de licuadoras que deberá adquirir para las ventas navideñas. Gaermont puede comprar cada licuadora a un precio de \$600, y los puede vender en \$850. Al finalizar la temporada navideña Gaermont estaría dispuesto a rematar estos aparatos a un precio de \$300. Gaermont supone que la demanda de licuadoras durante esa temporada está uniformemente distribuida con un mínimo de 500 y un máximo de 800 unidades.
Determine el punto de reorden de este artículo si

a) El costo de pedido es de \$6 000
b) El costo de pedido es de \$20 000

Solución
a)

$$F(Q^*) = \frac{V - C}{V - g} = \frac{850 - 600}{850 - 300} = 0.4545$$

Por lo que Q* = 636 unidades, con esto se obtiene que T = \$136 045.30

Por otra parte, en este caso M = 500*(\$850 – \$600) = \$125 000.
Dado que T > M, entonces procedemos a obtener la solución de la ecuación

$$\int_{500}^{r} [850D + 300(r - D)] \frac{1}{300} dD + \int_{r}^{800} 850r \frac{1}{300} dD - 600\, r = 136045.30$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores para r. En este caso r_1 = 555.46 y r_2 = 717.27.

Por lo que el punto de reorden es de 555 unidades. Esto es, si se tuviesen 555 o menos unidades en el inventario inicial entonces se debería realizar un pedido por la cantidad de unidades faltantes hasta alcanzar las 636 unidades.

b) Dado que el costo de pedir aumentó $14000 con respecto al inciso anterior, entonces T = $122 045.30

Como M = 500*($850 – $600) = $125 000, entonces T < M. Por lo que el punto de reorden es r = 122 045.3/250 ≈ 488. Esto es, si se tuviesen 488 o menos unidades en el inventario inicial entonces se debería realizar un pedido por la cantidad de unidades faltantes hasta alcanzar las 636 unidades.

8.3 Algunos escenarios diferentes en el caso del problema del vendedor de periódicos

Aun y cuando los supuestos que se manejan en este modelo regularmente permanecen constantes, es posible presentar algunas variaciones al modelo que podrían complicar su formulación y que podrían implicar una diferente forma de solución para el problema.

Una posible variación del problema clásico considerado en el modelo del vendedor de periódicos consiste en encontrar una cantidad óptima cuando existe la posibilidad de reordenar unidades faltantes al final del periodo con un costo diferente. Considere ahora los siguientes supuestos:

1. El producto puede ser ordenado al inicio del periodo a un costo C_1. Si la demanda es mayor que la cantidad adquirida y los clientes aceptan la posibilidad de una entrega retroactiva, es posible realizar un segundo pedido por las unidades faltantes, pero el precio de adquisición sería C_2 (suponga $C_2 > C_1$).
2. El precio de venta de cada artículo es V y si al final de periodo de venta quedasen artículos en inventario estos podrían venderse a un precio g.

En este caso es posible expresar a la función de utilidad esperada como:

$$E[U(Q)] = \int_0^Q [VD + g(Q-D) - QC_1]\, f(D)dD + \int_Q^\infty [VD - QC_1 - (D-Q)C_2]\, f(D)dD$$

La primera parte de la integral representa la utilidad cuando la demanda que se presenta se encuentra por debajo de la cantidad de pedido. En este caso, dado que se puede satisfacer toda la demanda, entonces se ingresarán VD unidades monetarias. El resto de

las unidades (Q – D) se venderán a un precio de rescate g, y a esto se le resta el costo de adquisición el cual es QC.
Por otra parte, si la demanda supera a la cantidad de pedido, entonces se hará un pedido extra y se satisfará la demanda en forma retroactiva, por lo que el ingreso seguirá siendo la demanda multiplicada por el precio de venta. En este caso, las primeras Q unidades se adquieren a un precio C1 y el resto de las unidades que se adquieren (D – Q) se adquieren a un precio C2.

Derivando se obtiene que el óptimo es alcanzado cuando

$$F(Q) = \frac{C_2 - C_1}{C_2 - g}$$

Nota: Se deja la demostración de esta fórmula como un ejercicio para el lector

Ejemplo 8.8

Es agosto de 2015 y Gaermont Automotriz está tratando de determinar cuántos autos modelo 2016 deben de ordenarse en la línea *Hawk*. Cada auto es adquirido a un costo de \$100,000. La demanda de autos tiene una distribución de probabilidad uniforme con parámetros a = 800, b = 1200. Cada auto es vendido en \$150,000. Si la demanda de autos excede el número de carros ordenados en agosto, la comercializadora debe de reordenar y cada auto será adquirido a un costo de \$120,000. Si la demanda de autos está por abajo del número de unidades ordenadas, los autos serán rematados en \$85,000. ¿Cuántos autos deben de ser solicitados?

Solución

$$F(Q^*) = \frac{C_2 - C_1}{C_2 - g} = \frac{120 - 100}{120 - 85} = 0.5714$$

Por lo que Q* = 1028 unidades.

En el ejemplo anterior existe el supuesto de que pueden ser reordenadas todas las unidades faltantes. No obstante, es muy posible que al realizar un nuevo pedido sea posible solicitar un número limitado de artículos, esto es, es posible realizar un segundo pedido pero sólo podrían reordenarse hasta un número máximo de R unidades faltantes.

En este caso, la formulación del problema sería el siguiente:

$$E[U(Q)] = \int_0^Q [VD + g(Q-D) - QC_1]\, f(D)dD + \int_Q^{Q+R} [VD - QC_1 - (D-Q)C_2]\, f(D)dD$$

$$+ \int_{Q+R}^{\infty} [V(Q+R) - QC_1 - RC_2]\, f(D)dD$$

De la misma manera que en los problemas anteriores, derivando e igualando a cero es posible obtener que:

$$\frac{\partial E[U(Q)]}{\partial Q} = gF(Q) + C_2[F(Q+R) - F(Q)] + V[1 - F(Q+R)] - C_1 = 0$$

La solución de la ecuación anterior depende en gran medida de la función de probabilidad que se esté manejando. Por ejemplo en el caso de una distribución uniforme o exponencial, entonces es factible expresar a $F(Q + R)$ en términos de $F(Q)$, sin embargo esto no es posible hacerlo cuando hablamos de una función de probabilidad normal, sin embargo, la solución de la ecuación no es difícil de alcanzar en base a un sistema de prueba y error.

Ejemplo 8.9

En el ejemplo anterior, suponga que Gaermont Automotriz sólo podría realizar un segundo pedido por un máximo de 80 autos.

a) ¿Cuántos autos deben de ser solicitados? (Suponga que la demanda sigue una distribución uniforme con parámetros a = 800, b = 1200)

b) ¿Cuántos autos deberían de ser solicitados si la demanda siguiese una distribución normal con parámetros μ = 1000 y σ = 50?

Solución

a)

Sustituyendo los valores de V, C_1, C_2, g y R en la ecuación anterior se obtiene que:

$$85F(Q) + 120\,[F(Q+80) - F(Q)] + 150[1 - F(Q+80)] - 100 = 0$$

Note que en el caso de la distribución uniforme,

$$F(Q+R) = F(Q) + \frac{R}{b-a}$$

por lo que en este caso, $F(Q + 80) = F(Q) + 80/400 = F(Q) + 0.2$.

De esta manera, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$85F(Q) + 120\,[0.2] + 150\,[0.8 - F(Q)] - 100 = 0$$

$$\rightarrow\ F(Q) = \frac{44}{65} = 0.6769$$

Por lo que Q* = 1070 unidades

b) En el caso de una distribución normal no es posible expresar a a $F(Q + R)$ en términos de $F(Q)$. Se recomienda realizar una primera prueba utilizando Q como la cantidad óptima de pedido bajo el modelo clásico del vendedor de periódicos.

Sustituyendo en la ecuación:

$$85F(Q) + 120\,[F(Q+80) - F(Q)] + 150[1 - F(Q+80)] - 100$$

Si Q = 1036, entonces el resultado de la ecuación es – 6.44. (Si el resultado es negativo entonces el valor de Q debe disminuir y si es positivo debe aumentar).
Con Q = 1000, entonces el resultado es 4.14. Por lo que debe aumentar.
El resultado óptimo se alcanza cuando el valor de Q es 1012.532, por lo que Q* = 1012 unidades.

Otra variante del modelo es suponer que si las unidades adquiridas se agotan, entonces es posible manejar backorders pero que sólo un porcentaje p de los clientes aceptará esta condición. Considere el siguiente ejemplo:

Es noviembre de 2007 y Gaermont Tienda Departamental está decidiendo cuántos juegos de X-box 3600 deben de ordenarse. Gaermont supone que la demanda de este producto durante la navidad tendrá una distribución exponencial con media de 100 unidades.
El costo de compra es de $3000, y el precio de venta es de $3600. Los clientes que estén interesados en la compra de este juego deberán anotar en una lista su nombre y dirección y una semana antes de navidad Gaermont confirmará a los clientes el envío del producto. Si Gaermont adquiere una cantidad de juegos mayor que la demanda, Gaermont rematará estos juegos a un precio de $2600 durante enero.
En caso de que la demanda sea más alta que el número de juegos ordenados por Gaermont, el resto de la demanda se podrá adquirir a un precio de $3500 por juego y se enviarán a los clientes para “el día de reyes” (6 de enero), sin embargo, ellos suponen que no todos los clientes aceptarán la entrega tardía y que un 50% de ellos se convertirán en ventas perdidas. Determine el número óptimo de juegos que debe ordenar Gaermont y la utilidad esperada.

Solución
La formulación del modelo ahora debe de corresponder con el siguiente modelo

$$E[U(Q)] = \int_0^Q [VD + g(Q - D) - QC_1] f(D)dD + \int_Q^\infty [VQ + p(D - Q)V - QC_1 - p(D - Q)C_2] f(D)dD$$

Se deja al lector la obtención de la fórmula para obtener Q*

7.4 Un problema del vendedor de periódicos con múltiples productos y restricciones "fuertes"

Aun y cuando en la Sección 8.2.2 se platicó un poco sobre este problema, existen ocasiones en las cuales el problema del vendedor de periódicos contiene restricciones que son demasiado fuertes y que no admiten una formulación como en la que se describe en esa sección.

Volviendo a retomar el problema de Gaermont Flores descrito en el Ejemplo 8.3. Tenemos que en este caso se deben obtener las cantidades óptimas a adquirir de cuatro diferentes tipos de flores: rosas, lirios, jazmines y nardos.

El precio de venta, el costo de adquisición y el precio de remate se presentan a continuación:

FLOR	Costo	Precio de venta	Precio de remate
Rosas	\$ 5	\$10	\$3
Lirios	\$ 8	\$14	\$5
Jazmines	\$11	\$15	\$4
Nardos	\$ 4	\$ 9	\$2

Por facilidad suponga que la demanda de cada una de las flores se distribuye en forma uniforme con parámetros U(1500, 2500), U(400, 1200), U(200, 800) y U(200, 1000) para rosas, lirios, jazmines y nardos respectivamente.

Si no existiesen restricciones sobre la cantidad de pedido, entonces deberían adquirirse 2214 rosas, 933 lirios, 418 jazmines y 771 nardos, y el costo de adquirir estas cantidades sería de $26 216.

Si el presupuesto estuviese restringido a una cantidad que fuese cercana a los $26 216 (digamos $23 000), entonces se podría utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange y el problema sería:

Maximizar

$$E[U(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)] = \sum_{i=1}^{4} \int_0^{Q_i} [V_i D_i + g_i(Q_i - D_i)] f_i(D_i) dD_i + \sum_{i=1}^{4} \int_0^{Q_i} [V_i Q_i] f_i(D_i) dD_i - \sum_{i=1}^{4} Q_i C_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i C_i \leq 23000$$

Al utilizar el método de Multiplicadores de Lagrange, entonces se obtiene que

$$F(Q_i^*) = \frac{V_i - C_i - \lambda C_i}{V_i - g_i}$$

Utilizando λ = 0.1819 se obtiene que $F(Q_1) = 0.5844$, $F(Q_2) = 0.5050$, $F(Q_3) = 0.1817$ y $F(Q_4) = 0.6103$. Con esto obtendríamos que $Q_1 = 2084$, $Q_2 = 803$, $Q_3 = 309$ y $Q_4 = 688$ y esto implicaría que la inversión total sería de $22 995.

Sin embargo, si la cantidad que se tiene para invertir en la compra de estas flores fuese un poco más lejana, por ejemplo $16 000. Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange sería ineficiente ya que en este caso si utilizamos λ = 0.3636 se tendría que $F(Q_1) = 0.4546$, $F(Q_2) = 0.3435$, $F(Q_3) = 0.0000$ y $F(Q_4) = 0.5065$. Al sustituir estos valores sucede que $Q_1 = 1954$, $Q_2 = 674$, $Q_3 = 200$ y $Q_4 = 605$ y la inversión total es de $19 782.

Lo natural sería tratar de aumentar más el valor de λ, sin embargo, si tratamos de aumentar este valor, entonces sucedería que $F(Q_3)$ tomaría valores negativo, lo cual carece totalmente de sentido para el problema.

El problema que aquí se plantea no es una consecuencia del cambio en la función de probabilidad de la demanda, en el caso de seguir utilizando las distribuciones normales propuestas en el problema original (Problema 8.2), entonces sucedería que la solución implicaría la necesidad de realizar pedidos con cantidades negativas de jazmines.

Obviamente, si el presupuesto para la compra de estas flores fuese aún menor que los $16 000 que aquí se proponen, entonces el problema implicaría una mayor complicación. Cuando este tipo de restricciones suceden, el Método de Multiplicadores de Lagrange deja de ser útil.

En este caso es conveniente visualizar los rendimientos que se obtienen al comprar cada uno de los tipos de flores.

Por ejemplo, en el caso de una rosa, el rendimiento que nos ofrece la venta de una de ellas representa el 100% (el costo es $5 y el precio de venta es $10, lo cual representa un 100% de utilidad). En el caso de un lirio el rendimiento es del 75%, en el caso de un jazmín el rendimiento es del 36.36% y en el caso de un nardo el rendimiento es del 125%.

Este análisis es fundamental, ya que si se dispone de una cantidad muy pequeña para la inversión entonces lo recomendable sería adquirir cuantos nardos fuera dado que su rentabilidad es la más alta.

FLOR	Costo	Precio de Venta	Precio de remate	Rentabilidad	a	b
Rosas	$ 5	$10	$3	100.00%	1500	2500
Lirios	$ 8	$14	$5	75.00%	400	1200
Jazmines	$11	$15	$4	36.36%	200	800
Nardos	$ 4	$ 9	$2	125.00%	200	1000

Una observación valiosa en este punto del análisis es notar que, si la venta es totalmente segura, los nardos constituyen la mejor opción al momento de realizar una inversión en este tipo de flores. Esto significa que si nosotros tuviésemos disponible una cantidad menor de $800 para realizar la inversión, entonces lo más rentable sería comprar nardos exclusivamente (dado que con $800 se podrían comprar 200 nardos lo cual representa una venta totalmente asegurada de acuerdo a su distribución de probabilidad).

La pregunta ahora consistiría en saber qué es lo conveniente si nosotros tuviésemos un poco más de $800. Por ejemplo, si se dispone de $820, ¿cuál de las siguientes opciones sería más conveniente?

a) comprar 200 nardos y 4 rosas.
b) comprar 205 nardos.

Si se decidiese utilizar la opción a) entonces los 200 nardos y las 4 rosas seguramente se venderían y se obtendría una utilidad de 200*$5 + 4*$5 = $1020.
Si se decide utilizar la opción b) entonces (aunque no representa una opción segura) se tiene una alta probabilidad de alcanzar una utilidad de $1025.

Una forma de evaluar estas opciones consiste en examinar el rendimiento esperado del último nardo que se adquiere en la opción b). Suponga que se adquieren los 205 nardos, entonces la utilidad esperada del último nardo adquirido será:
Rendimiento Esperado = [5*P(El nardo se vende) – 2*P(El nardo no se vende)] / 4

Por ejemplo, si se adquieren 205 nardos, entonces el rendimiento esperado del último nardo que se adquiere es:

[5 * (795/800) – 2 * (5/800)] / 4 = 1.2391

Dado que el rendimiento esperado es del 123.91% y este es mayor que el rendimiento esperado por la venta de una rosa (que es del 100%), entonces la mejor opción es la compra de los 205 nardos.

Ahora, la pregunta sería hasta qué punto es conveniente seguir adquiriendo nardos. La respuesta intuitiva indica que deberíamos adquirir nardos hasta que el rendimiento esperado se encuentre por abajo del 100%. A partir de este punto debería de ser más conveniente empezar a adquirir rosas.

Para saber cuántos nardos extras a los doscientos se deben de adquirir entonces se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{5\left(\frac{800-x}{800}\right)-2\left(\frac{x}{800}\right)}{4}=1$$

La solución se obtiene cuando x = 114.2857. Por tanto, se deberían de adquirir 114 nardos extras a los 200 antes de iniciar a comprar rosas. Esto es, si se dispone de una cantidad menor o igual a $1256, entonces deberían de adquirirse únicamente nardos.

Ahora, si se dispone de una cantidad un poco mayor a los $1256 ¿qué deberíamos hacer? La respuesta se obtiene mediante el mismo razonamiento que se ha seguido hasta este momento: debemos adquirir aquel producto que nos ofrezca una mayor rentabilidad.

Para nuestro problema esto significa que, si después de adquirir 314 nardos aun tuviésemos cierta cantidad disponible para invertir, entonces se debería de adquirir rosas. Por otra parte, es posible seguir adquiriendo este artículo hasta que su rentabilidad empiece a disminuir. Dado que la cantidad mínima de rosas que se podrían vender con absoluta certeza son 1500, entonces esto significará $7500 extras a los $1256 que se utilizan para los nardos. Es decir, si la cantidad de dinero disponible para la inversión se encuentra entre los $1256 y los $8756, entonces adquiera 314 nardos y el resto inviértalos en rosas.

La pregunta ahora es qué deberíamos de hacer si se tiene un poco más de $8756. Note que tanto los nardos como las rosas que se han adquirido nos ofrecen hasta ahora una rentabilidad mínima del 100%, lo cual es más alta que la rentabilidad ofrecida por los lirios (que es del 75%). Por lo que resulta bastante lógico que si la cantidad de la cual disponemos supera por un pequeño margen a los $8756, entonces se deberían de seguir adquiriendo únicamente rosas y nardos, la pregunta es, ¿hasta cuándo debemos adquirir únicamente nardos y rosas?, ¿en qué proporción?,

Debemos adquirir únicamente nardos y rosas hasta que la rentabilidad que nos proporcionan estas flores se encuentren por abajo del 75%, en ese momento deberíamos de empezar a adquirir lirios.

Para determinar estas cantidades debemos de resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{5\left(\frac{800-x}{800}\right)-2\left(\frac{x}{800}\right)}{4}=0.75$$

$$\frac{5\left(\frac{1000-y}{1000}\right)-2\left(\frac{y}{1000}\right)}{5}=0.75$$

De la primera ecuación se obtiene el número de nardos y de la segunda ecuación se obtiene el número de rosas. En este caso, con 428 nardos o 1678 rosas aún se obtendría una rentabilidad mayor que con los lirios. De esta forma, si el presupuesto disponible es menor o igual a $10,102 únicamente de comprarse nardos y rosas.

La proporción en que deben de adquirirse estas flores se puede obtener si se aplica a estos dos artículos el método de multiplicadores de Lagrange con la restricción de presupuesto.

Es decir, si tenemos un presupuesto de $9,500 y nos preguntan cuántas unidades de cada tipo de flor debemos adquirir, entonces se declara que no se debe de adquirir ni lirios ni jazmines, y para determinar el número de rosas y nardos se aplica el método de multiplicadores de Lagrange a estos dos artículos. En este caso, los resultados sería adquirir 1598 rosas y 377 nardos, la rentabilidad en ambos casos sería del 86.2%.

De esta manera, ahora podemos resolver el problema para cualquier cantidad de presupuesto que se disponga.

Un resumen de los resultados para este problema se presenta en la siguiente tabla

Presupuesto	Política a seguir
$0 \leq p \leq 1256$	Invierta todo en nardos
$1256 \leq p \leq 8756$	Adquiera 314 nardos y con el resto adquiera rosas
$8756 \leq p \leq 10102$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando únicamente nardos y rosas.
$10102 \leq p \leq 13302$	Adquiera 428 nardos y 1678 rosas. Con el resto adquiera lirios.
$13302 \leq p \leq 17582$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando nardos, rosas y lirios.
$17582 \leq p \leq 19782$	Adquiera 605 nardos, 1954 rosas, 674 lirios y el resto inviértalos en jazmines.
$19782 \leq p \leq 26216$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando nardos, rosas, lirios y jazmines.
$26216 \leq p$	Adquiera 2214 rosas, 933 lirios, 418 jazmines y 771 nardos (esto es, las cantidades óptimas de cada tipo de flor).

En el caso de que la función de distribución de la demanda de las flores se considerase normal, entonces el razonamiento es similar, sin embargo, es mucho más conveniente pensar en el presupuesto en forma decreciente.

Si retomamos nuevamente el problema de las flores con una demanda que se distribuye normalmente con parámetros $\mathrm{N}(2000, 200)$, $\mathrm{N}(800, 150)$, $\mathrm{N}(500, 120)$ y $\mathrm{N}(600, 140)$ para rosas, lirios, jazmines y nardos, respectivamente, entonces se había comentado que las cantidad óptimas son $Q_1 = 2113$, $Q_2 = 864$, $Q_3 = 458$ y $Q_4 = 679$ y el presupuesto de inversión que esto representa es de $25 231.

Si el presupuesto fuese menor, el método de multiplicadores de Lagrange podría aplicarse hasta que el número de alguna de las flores que se están adquiriendo tomase el valor de cero. En ese punto, el problema debería ser replanteado considerando únicamente aquellas flores que no han llegado a tomar el valor de cero.

En el problema que hemos estado estudiando, la cantidad óptima de jazmines es la primera que alcanza el valor de cero y esto sucede cuando se adquieren 1977 rosas, 739 lirios y 620 nardos y el presupuesto es de $18 205.

La siguiente flor que obtiene como valor óptimo cero son los lirios, y esto ocurre cuando se adquieren 1815 rosas y 520 nardos y el presupuesto es de $11 155. La siguiente flor que deberá de eliminarse serían las rosas y esto ocurrirá cuando se adquieran 450 nardos y el presupuesto sea de $1 800.

Por lo tanto, en este caso, un resumen de las políticas de acuerdo al presupuesto se presenta en la siguiente tabla:

Presupuesto	**Política a seguir**
$0 \leq p \leq 1800$	Invierta todo en nardos.
$1800 \leq p \leq 11155$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando únicamente nardos y rosas.
$11155 \leq p \leq 18205$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando nardos, rosas y lirios.
$18205 \leq p \leq 25231$	Resuelva el problema con la restricción de presupuesto utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange considerando todas las flores.
$25231 \leq p$	Adquiera 2113 rosas, 864 lirios, 458 jazmines y 679 nardos (que representan las cantidades óptimas a adquirir de cada tipo de flor).

7.5 Resumen del Capítulo

En este capítulo se ha analizado el problema del vendedor de periódico (llamado también el Modelo de Periodo Único). La fórmula para obtener la cantidad óptima de pedido puede expresarse como:

$$F(Q^*) = \frac{V - C}{V - g}$$

Donde F representa la función de distribución de probabilidad acumulada.

El uso de esta fórmula es frecuentemente asociado para la resolución de problemas que se presentan en la primera sección de este capítulo. No obstante, en este capítulo se han presentado muchas variaciones a este problema de tal forma que su aplicación puede ser útil para tomar decisiones en muy diversas situaciones.

También se desea subrayar la formulación que se realiza del primer problema ya la utilización de la teoría de decisiones para resolver un problema de inventarios será algo que se utilizará en el Capítulo 9 para tratar de formular óptimos en el caso de una demanda granulada.